22 FEBBRAIO 2024
ESERCITAZIONE 0
STEFANO RADRIZZANI

<u>ARGOMENTI</u> :

→ SISTEMI DINAMICI LINEARI IN SPAZIO DI STATO

→ CALCOLO DEGLI EQUILIBRI E DEL GUADAGNO

COMMENTI AGGIUNTIVI SU ESERCIZIO 3

SISTEMI DINAMICI LINEARI

$\dot{x}(t) = A\underbrace{x(t)}_{\text{STATO}} + B\underbrace{u(t)}_{\text{INGRESSO}}$ EQ. DI STATO

$y(t) = Cx(t) + Du(t)$ EQ. DI USCITA

y → USCITA

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$

$y(k) = Cx(k) + Du(k)$

CALCOLO EQUILIBRI ≡ STUDIO IN CONDIZIONI STATICHE

$u(t) = \bar{u} \quad \forall t \Rightarrow$ DOMANDA:

$\exists \ x(t) = \bar{x} \ \forall t$?

→ SE ESISTE SI CHIAMA EQUILIBRIO

$\Rightarrow \dot{x}(t) = 0$ × SISTEMI TEMPO CONTINUO

$\Rightarrow x(k) = x(k+1) = \bar{x}$ × SISTEMI TEMPO DISCRETO

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

$$\Downarrow \quad u = \bar{u}$$
$$x = \bar{x} \quad \dot{x} = 0$$

$$0 = A\bar{x} + B\bar{u}$$
$$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$$

$$\downarrow$$

SE $\exists A^{-1}$

$\det(A) \neq 0$

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

$$\Downarrow \quad x(k+1) = x(k) = \bar{x}$$
$$u(k) = \bar{u}$$

$$\bar{x} = A\bar{x} + B\bar{u}$$
$$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u}$$

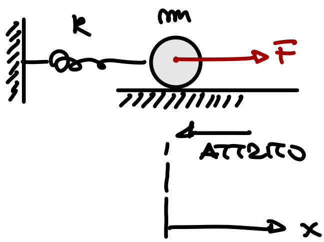
$$\Downarrow$$

$$\bar{x} = (I-A)^{-1}B\bar{u}$$

$\exists (I-A)^{-1}$

SE $\exists \bar{x} \Rightarrow \mu = \dfrac{\bar{y}}{\bar{u}}$ È IL GUADAGNO DEL SISTEMA

ESERCIZIO 1



F FORZA ESTERNA

$m > 0$

FORZA ELASTICA

$F_{el} = Kx$

$F_{att} = hv$

x POSIZIONE DELLA MASSA m

v VELOCITA' DELLA MASSA m

1) DESCRIVERE IL SISTEMA IN FORMA DI STATO CON USCITA $y = x$

BILANCIO DI FORZE

$$ma = F - F_{el} - F_{att}$$

$$ma = F - Kx - hv$$

$$v = \dot{x}$$

$$a = \dot{v}$$

$$\begin{cases} m\dot{v} = F - Kx - hv \\ \dot{x} = v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{1}{m}[F - Kx - hv] \\ \dot{x} = v \end{cases}$$

GLI STATI DEL SISTEMA SONO
LA POSIZIONE E LA VELOCITA'

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\frac{k}{m}x - \frac{h}{m}v + \frac{F}{m} \\ y = x \end{cases}$$

VETTORE DEGLI STATI $\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$ INGRESSO F

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{h}{m} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

2) CALCOLARE GLI EQUILIBRI DEL SISTEMA

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{h}{m} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \frac{k}{m} = 0 \quad \text{SE} \quad k = 0$$

A E' INVERTIBILE SE $k \neq 0$

- $K \neq 0 \Rightarrow \exists$ EQUILIBRIO

$$\dot{x} = \boxed{\bar{v} = 0}$$

$$\dot{v} = \frac{1}{m}\left[\bar{F} - K\bar{x} - \underbrace{\cancel{h}}_{=0}\bar{v}\right] = 0$$

$$\bar{F} - K\bar{x} = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{\bar{F}}{K}}$$

$$\boxed{\bar{y} = \bar{x} = \frac{\bar{F}}{K}}$$

- $K = 0$

$$\dot{x} = \bar{v} = 0$$

$$\dot{v} = \frac{1}{m}\left[\bar{F} - \underbrace{\cancel{K}}_{=0}\bar{x} - \underbrace{\cancel{h}}_{=0}\bar{v}\right] = 0$$

$\Rightarrow$ IL SISTEMA HA SOLUZIONE

SOLO SE $\bar{F} = 0$

$K \neq 0$

$\bar{x} = \frac{\bar{F}}{K}$

$\bar{v} = 0$

1 EQUILIBRIO

$K = 0$

$\bar{F} = 0$

$\bar{x}$ QUALSIASI

$\bar{v} = 0$

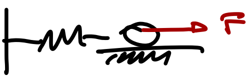
∞ EQUILIBRI

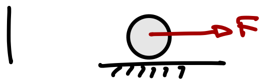
$K = 0$

$\bar{F} \neq 0$

NON CI SONO EQUILIBRI

0 EQUILIBRI





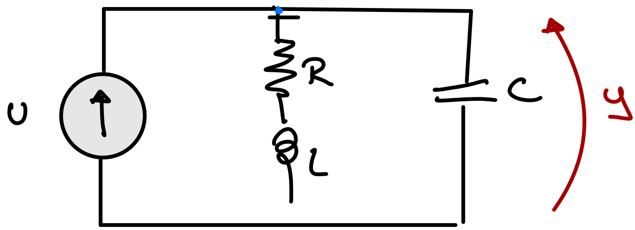
3) SE $K \neq 0$ QUAL E' IL GUADAGNO DEL SISTEMA

$$\mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}}$$

$$\bar{y} = \frac{\bar{F}}{K} \qquad \bar{u} = \bar{F}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{K}}$$

ESERCIZIO 2



1) DESCRIVERE IL SISTEMA IN FORMA DI STATO

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C} i_c \qquad \dot{x}_1 = \frac{1}{C} i_c$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} v_L \qquad \dot{x}_2 = \frac{1}{L} v_L$$

$$i_c = u - i_L = u - x_2$$

$$v_L = x_1 - R i_L = x_1 - R x_2$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{C}[u - x_2] \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{L}[x_1 - R x_2] \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0] \qquad D = 0$$

2) CALCOLARE GLI EQUILIBRI

$$\det(A) = \frac{1}{CL}$$

A è invertibile se $C \neq 0$ $L \neq 0$

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C}\left[\bar{u} - \bar{x}_2\right] = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{x}_2 = \bar{u}}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L}\left[\bar{x}_1 - R\bar{x}_2\right] = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = R\bar{x}_2 = R\bar{u}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{x}_1 = R\bar{u}}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \bar{x}_1 = R\bar{u}$$

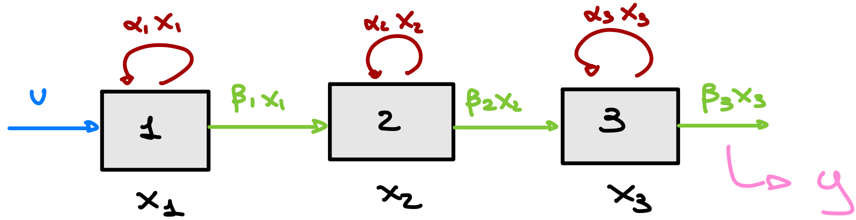
3) CALCOLARE IL GUADAGNO

IL GUADAGNO DEL SISTEMA

$$\mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = R$$

ESERCIZIO 3

SISTEMA : PROCESSO PRODUTTIVO CON 3 FASI DI LAVORAZIONE



u : NUMERO DI PEZZI CHE ARRIVANO OGNI ORA

x_i : IL NUMERO DI PEZZI NELLA FASE i , $i = 1, 2, 3$ OGNI ORA

α_i : LA PORZIONE DI PEZZI CHE DEVO RILAVORARE NELL'ORA SUCCESSIVA

β_i LA PORZIONE DI PEZZI CHE PASSANO AL LIVELLO SUCCESSIVO NELL'ORA SUCCESSIVA

CIÒ CHE NON VIENE RILAVORATO O PASSA DI LIVELLO VIENE SCARTATO

QUELLO CHE VOGLIAMO MONITORARE SONO I PEZZI PRODOTTI

1) DESCRIVERE IL SISTEMA IN FORMA DI STATO

$$x_1(k+1) = u(k) + \alpha_1 x_1(k)$$

$$x_2(k+1) = \beta_1 x_1(k) + \alpha_2 x_2(k)$$

$$x_3(k+1) = \beta_2 x_2(k) + \alpha_3 x_3(k)$$

$$y(k) = \beta_3 x_3(k)$$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_3 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

2) CALCOLARE GLI EQUILIBRI E IL GUADAGNO

$$\bar{x}_1 = \bar{u} + \alpha_1 \bar{x}_1 \Rightarrow \boxed{\bar{x}_1 = \frac{\bar{u}}{1-\alpha_1}}$$

$$\bar{x}_2 = \beta_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2$$

$$\bar{x}_2 = \beta_1 \frac{\bar{u}}{1-\alpha_1} + \alpha_2 \bar{x}_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{x}_2 = \frac{\beta_1}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)} \bar{u}}$$

$$\bar{x}_3 = \beta_2 \bar{x}_2 + \alpha_3 \bar{x}_3$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{x}_3 = \frac{\beta_1 \beta_2}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)} \bar{u}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{y} = \underbrace{\frac{\beta_1 \beta_2 \beta_2}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)}}_{\text{GUADAGNO DEL SISTEMA}} \bar{u}}$$

COMMENTO #1

L'EQUILIBRIO È DEFINITO SE

$$(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3) \neq 0$$

INFATTI DATA

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$I - A = \begin{bmatrix} 1-\alpha_1 & 0 & 0 \\ -\beta_1 & 1-\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\beta_2 & 1-\alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$\det(I-A) \neq 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)}_{\text{MATRICE } I-A \text{ È TRIANGOLARE!}} \neq 0$$

COMMENTO #2

PER RISOLVERE L'ESERCIZIO 3 POSSIAMO RAGIONARE NEL SEGUENTE MODO

$$x(k+1) = \text{QUELLO CHE RIMANE} + \text{QUELLO CHE ARRIVA}$$

OPPURE <u>EQUIVALENTEMENTE</u>

$$x(k+1) = \text{QUELLO CHE AVEVO} + \text{QUELLO CHE ARRIVA} - \text{QUELLO CHE ESCE}$$

ES: FASE 1

$$x_1(k+1) = \underbrace{\alpha_1 x_1(k)}_{\text{QUELLO CHE RIMANE}} + \underbrace{u(k)}_{\text{QUELLO CHE ARRIVA}}$$

$$x_1(k+1) = \underbrace{x_1(k)}_{\text{QUELLO CHE AVEVO}} + \underbrace{u(k)}_{\text{QUELLO CHE ARRIVA}} - \underbrace{\beta_1 x_1(k)}_{\text{QUELLO CHE VA IN 2}} - \underbrace{(1-\alpha_1-\beta_1)x_1(k)}_{\text{QUELLO CHE PERDO}}$$

$$= \alpha_1 x_1(k) + u(k) \quad \underline{\text{ok}}$$