11 MARZO 2024
ESERCITAZIONE 2
STEFANO RADRIZZANI

ARGOMENTI:

→ MODELLI INGRESSO \ USCITA

→ OPERATORE S|Z E
FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

↓

LEGAME INGRESSO/USCITA DI UN SISTEMA DINAMICO

SPAZIO DI STATO

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

$$\dot{x} \rightarrow s \cdot x$$

↳ OPERATORE S O DI LAPLACE

$$sx = Ax + Bu$$

$$(sI - A)x = Bu$$

$$x = (sI - A)^{-1} Bu$$

$$y = C(sI - A^{-1})Bu + Du$$

$$y = \underbrace{\left[C(sI-A)^{-1}B + D \right]}_{\text{FUNZIONE DI TRASFERIMENTO } G(s)} u$$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

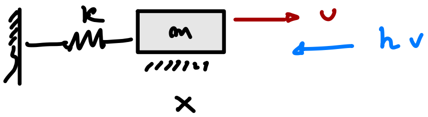
N, D, POLINOMI IN S

LE RADICI DI N SONO GLI ZERI
LE RADICI DI D SONO I POLI
DEL SISTEMA

LE RADICI DEL DENOMINATORE
SONO GLI AUTOVALORI DELLA
MATRICE DI STATO DEL
SISTEMA

$G(0)$ RAPPRESENTA IL GUADAGNO
DEL SISTEMA

ESERCIZIO 1



1) RICAVARE FUNZIONE DI TRASFERIMENTO, ZERI E POLI

BILANCIO DI FORZE

$$m a = u - kx - hv$$

$$v = \dot{x} \qquad a = \dot{v} = \ddot{x}$$

$$m\ddot{x} = u - kx - h\dot{x}$$

$$\dot{x} \to s x$$

$$\ddot{x} \to s\dot{x} \to s^2 x$$

$$m s^2 x + kx + hsx = u$$

$$(m s^2 + hs + k)\, x = u$$

$$x = \boxed{\frac{1}{ms^2 + hs + k}}\, u$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DALLA FORZA u ALLA POSIZIONE x

PER CALCOLARE LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DA U A V

$$V = \dot{x} = sX$$

$$V = \boxed{s \cdot \frac{1}{ms^2 + hs + k}} U$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DALLA FORZA U ALLA VELOCITÀ V

<u>POLI</u> : LE FUNZIONI DI TRASFERIMENTO HANNO STESSO DENOMINATORE

$\Downarrow$

STESSI POLI

$$ms^2 + hs + k = 0$$

$$s_{1/2} = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 - 4mk}}{2m}$$

<u>ZERI</u> : PER X

$N(s) = 1$

$\Downarrow$

non ci sono zeri

PER V

$N(s) = s$

$\Downarrow$

ZERO IN $s = 0$

GUADAGNO: PER x

$$G(0) = \frac{1}{m0^2 + h\cdot 0 + k}$$

$$\Downarrow$$

$$G(0) = \frac{1}{k}$$

PER v

$$G(0) = \frac{0}{m0^2 + h0 + k}$$

$$\Downarrow$$

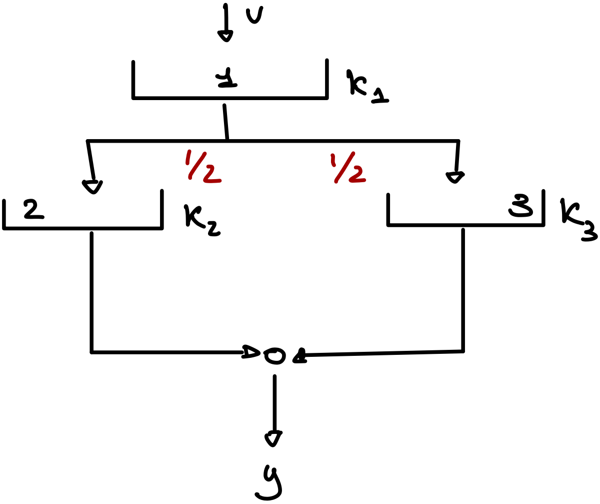
$$G(0) = 0$$

DA ES 1: POSIZIONE E VELOCITA' SONO STATI DEL SISTEMA

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{k}\bar{u} \\ \bar{v} = 0 \quad \forall \bar{u} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ POSSIAMO RICAVARE GLI STATI DI EQUILIBRIO

ESERCIZIO 2



RICAVO E ANALIZZO F.D.T.

- $k_1 \neq k_2 \neq k_3$
- $k_2 \neq k_3$

x_i: LIVELLO

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u - k_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{2} k_1 x_1 - k_2 x_2 \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{2} k_1 x_1 - k_3 x_3 \\ y &= k_2 x_2 + k_3 x_3 \end{aligned}\right.$$

SISTEMA IN SPAZIO DI STATO

$$\hookrightarrow \quad A = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} k_1 & -k_2 & 0 \\ \frac{1}{2} k_1 & 0 & -k_3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(A) = \{ -k_1, \ -k_2, \ -k_3 \}$$

1) $$s x_1 = u - k_1 x_1$$

$$x_1 = \frac{1}{s + k_1} u$$

2) $$s x_2 = \frac{1}{2} k_1 x_1 - k_2 x_2$$

$$(s + k_2) x_2 = \frac{1}{2} k_1 \frac{1}{s + k_1} u$$

$$x_2 = \frac{\frac{1}{2} k_1}{(s + k_1)(s + k_2)} u$$

3) $$s x_3 = \frac{1}{2} k_1 x_1 - k_3 x_3$$

$$x_3 = \frac{\frac{1}{2} k_1}{(s + k_1)(s + k_3)} u$$

y) $y = K_2 x_2 + K_3 x_3$

$$= \frac{1}{2} \frac{K_1}{s+K_1} \left[\frac{K_2}{s+K_2} + \frac{K_3}{s+K_3} \right] U$$

$$= \frac{1}{2} \frac{K_1}{s+K_1} \left[\frac{K_2 s + K_2 K_3 + K_3 s + K_2 K_3}{(s+K_2)(s+K_3)} \right] U$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} \frac{K_1}{s+K_1} \frac{(K_2+K_3)s + 2K_2K_3}{(s+K_2)(s+K_3)}} U$$

$G(s)$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO TRA INGRESSO u E USCITA y

<u>POLI</u> : $(s+K_1)(s+K_2)(s+K_3) = 0$

$\Rightarrow$ POLI : $-K_1$, $-K_2$, $-K_3$

$\Rightarrow$ I POLI $\equiv$ AUTOVALORI DI A

ZERI : $\cancel{K_1}\left[(K_2+K_3)s + K_2K_3\right]=0$

$\Rightarrow$ ZERO $s = \dfrac{-K_2K_3}{K_2+K_3}$

GUADAGNO : $G(0) = \dfrac{2K_1K_2K_3}{2K_1K_2K_3} = 1$

SE $K_2 = K_3 = K$

$$G(s) = \frac{1}{2}\,\frac{K_1}{s+K_1}\,\frac{(K_2+K_3)s+2K_2K_3}{(s+K_2)(s+K_3)}$$

$$\Downarrow$$

$$G(s) = \frac{1}{2}\,\frac{K_1}{s+K_1}\,\frac{2Ks+2K^2}{(s+K)^2}$$

$$G(s) = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{k_1}{s + k_1} \cancel{2}k \frac{\cancel{(s+k)}}{(s+k)^{\cancel{2}}}$$

$$G(s) = \frac{k_1 \, k_2}{(s + k_1)(s + k)}$$

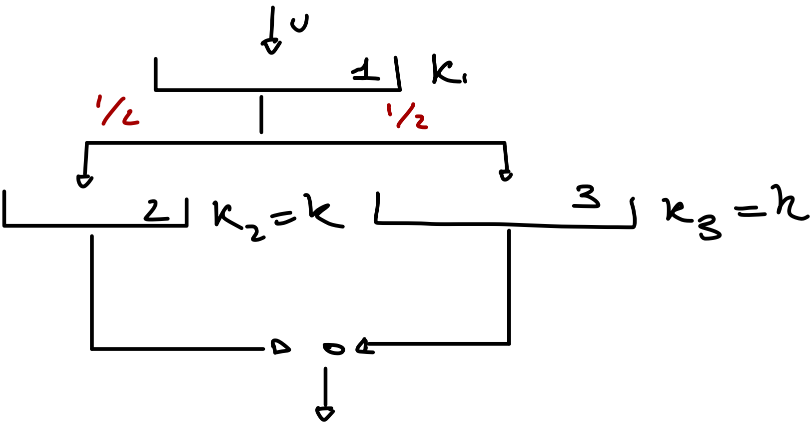
↳ IL DENOMINATORE HA GRADO 2

POLI : $-k_1, \; -k$ qui AUTOVALORI $-k_1, \; -k, \; -k$

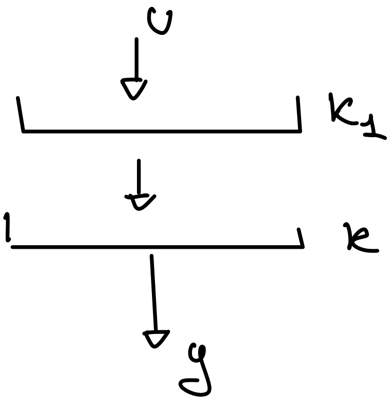
ZERI : non ci sono

GUADAGNO : $G(0) = 1 = \dfrac{k_1 \, k_2}{k_1 \, k_2}$

A CAUSA DELLA CANCELLAZIONE I POLI NON SONO TUTTI GLI AUTOVALORI DELLA MATRICE DI STATO A



È EQUIVALENTE A



$$G(s) = \frac{K_1 K}{(s+K_1)(s+K)}$$

$$y = G(s)\,u$$

$$= \frac{K_1 K}{(s+K_1)(s+K)}\,u$$

$$(s+K_1)(s+K)\,y = K_1 K\,u$$

$$(s^2 + (K_1+K)s + K_1 K)\,y = K_1 K\,u$$

$$s^2 y + (K_1+K)sy + K_1 K y = K_1 K u$$

$$sy \rightarrow \dot{y}$$

$$s^2 y \rightarrow \ddot{y}$$

$$\boxed{\ddot{y} + (K_1+K)\dot{y} + K_1 K y = K_1 K u}$$

SISTEMI TEMPO DISCRETO

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k)$$
$$y(k) = C x(k) + D u(k)$$

z : $x(k+1) = z\,x(k)$

↓

OPERATORE z

$$z x = A x + B u$$
$$y = C x + D u$$

NOTA : IL GUADAGNO E' $G(1)$

ESERCIZIO 3

Una società finanziaria, all'inizio di ogni mese eroga nuovi prestiti di durata $\boxed{\text{quadrimestrale,}}$ riscuote l'interesse su prestiti esistenti nella misura dell'1 % dell'ammontare del prestito, incassa il rimborso dei prestiti giunti a scadenza, classifica come "persi" in media il 2% dei prestiti esistenti. Questi non daranno più luogo a interessi e non saranno riscuotibili alla scadenza.
Descrivere tale attività mediante un modello matematico (interno ed esterno), in cui l'ingresso rappresenta l'ammontare dei nuovi prestiti erogati all'inizio del mese e l'uscita l'ammontare degli interessi riscossi.
Se, a partire da t=0, ogni mese i nuovi prestiti erogati ammontano a 100000 €, calcolare l'ammontare mensile degli interessi riscossi a regime.

U : IL NUMERO DI NUOVI FINANZIAMENTI

x_i IL NUMERO DI PRESTITI AL MESE i

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 0.98\, u(k) \\ x_2(k+1) = 0.98\, x_1(k) \\ x_3(k+1) = 0.98\, x_2(k) \\ x_4(k+1) = 0.98\, x_3(k) \\ \\ y(k) = 0.01\left[x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) + x_4(k)\right] \end{cases}$$

SPAZIO DI STATO

(modello interno)

$$2x_1 = 0.98\, u \rightarrow x_1 = \frac{0.98}{2}\, u$$

$$2x_2 = 0.98\, x_1 \rightarrow x_2 = \frac{0.98}{2}\, x_1 = \frac{0.98^2}{2^2}\, u$$

$$z x_3 = 0.98 x_2 \quad \longrightarrow \quad x_3 = \frac{0.98^3}{z^3} u$$

$$z x_4 = 0.98 x_3 \quad \longrightarrow \quad x_4 = \frac{0.98^4}{z^4} u$$

$$y = 0.01 \left[x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \right] =$$

$$= 0.01 \left[\frac{0.98}{z} + \frac{0.98^2}{z^2} + \frac{0.98^3}{z^3} + \frac{0.98^4}{z^4} \right] u$$

$$= \boxed{0.01 \cdot 0.98 \left[\frac{z^3 + 0.98 z^2 + 0.98^2 z^3 + 0.98^4}{z^4} \right] u}$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$G(z)$

(modello esterno)

$$y z^4 = 0.01 \cdot 0.98 \left[z^3 u + z^2 0.98 u + z 0.98^2 u + .0.98 u \right]$$

$$y(k+4) = \alpha u(k+3) + \beta u(k+2) + \gamma u(k+1) + \delta u(k)$$

$$\boxed{\begin{aligned} y(k) = {} & \alpha\, u(k-1) + \beta\, u(k-2) + \gamma\, u(k-3) + \\ & + \delta\, u(k-4) \end{aligned}}$$

(modello esterno)

ESERCIZIO 4

Sia dato un sistema dinamico lineare a tempo continuo definito dalle matrici

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad c = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad d = 0$$

Determinare la funzione di trasferimento del sistema commentando il risultato ottenuto. Valutare equilibrio, zeri, poli e guadagno del sistema.

$$G(s) = C[sI - A]^{-1} B + D$$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + u \longrightarrow x_2 = \frac{u}{s+2}$$

$$\dot{x}_3 = -x_2 - 3x_3 + u$$

$$y = x_1 - x_2$$

$$(s+1)x_1 = x_2 + u = \frac{u}{s+2} + u = \frac{1 + s+2}{s+2} u$$

$$x_1 = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} u$$

$$(s+3)\,x_3 = -x_2 + u =$$

$$= -\frac{u}{s+2} + u = \frac{-1+s+2}{s+2}\,u$$

$$x_3 = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}\,u$$

$$y = x_1 - x_2 =$$

$$= \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\,u - \frac{1}{s+2}\,u$$

$$= \frac{s+3-(s+1)}{(s+1)(s+2)}\,u$$

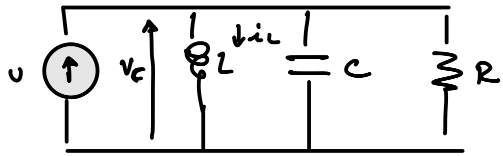
$$= \boxed{\frac{2}{(s+1)(s+2)}}\,u$$

FUNZIONE DI

TRASFERIMENTO

MOTIVO : x_3 non ha nessun ruolo nel legame ingresso uscita.

ESERCIZIO 5



$$\dot{i}_L = \frac{1}{L} v_c$$

$$\dot{v}_c = \frac{1}{C}\left[u - i_L - \frac{v_c}{R}\right]$$

1) $y = i_L$

2) $y = u - i_L - \frac{v_c}{R}$

3) $y = \frac{v_c}{R}$

2) CONSIDERIAMO COME USCITA LA CORRENTE NEL CONDENSATORE

$$s\, i_L = \frac{1}{L} v_c \longrightarrow i_L = \frac{1}{sL} v_c$$

$$s\, v_c = \frac{1}{C}\left[u - i_L - \frac{v_c}{R}\right]$$

$$s V_c = \frac{1}{C}\left[u - \frac{V_c}{sL} - \frac{V_c}{R} \right]$$

$$\left(s + \frac{1}{sLC} + \frac{1}{RC} \right) V_c = \frac{1}{C} u$$

$$\left(\frac{s^2 L C^2 R + RC + sLC}{sLCR\cancel{C}} \right) V_c = \frac{1}{\cancel{C}} u$$

$$V_c = \frac{sLCR}{s^2 L C^2 R + LCs + RC}$$

$$y = u - i_L - \frac{V_c}{R} =$$

$$= u - \left(\frac{1}{sL} + \frac{1}{R} \right) V_c$$

$$y = u - \left(\frac{R + sL}{\cancel{sLR}} \right) \frac{\cancel{sLCR} \quad C}{s^2 L C^2 R + LCs + RC}$$

$$y = \frac{s^2 L C^2 R + \cancel{LCs} \cancel{+RC} - \cancel{RC} - \cancel{sLC}}{s^2 L C^2 R + LCs + RC} u$$

$$y = \boxed{\frac{s^2 LC^2 R}{s^2 LC^2 R + LCs + RC}}\, u$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

NOTA: IL GRADO DEL NUMERATORE È UGUALE A QUELLO DEL DENOMINATORE

POICHÉ u INFLUENZA DIRETTAMENTE y

[SISTEMI NON STRETTAMENTE PROPRI]

ESERCIZIO EXTRA

I finanziamenti concessi da una certa banca alle imprese sono classificati in tre categorie:

1 = elevata affidabilità 2 = media affidabilità 3 = scarsa affidabilità

Ogni anno, in base alle informazioni sulla solidità delle imprese, una frazione α_{ij} dei finanziamenti di categoria i viene classificata in categoria j, mentre un'ulteriore frazione β_i diviene parte delle "sofferenze" (finanziamenti non più riscuotibili). Infine, ogni anno t la banca concede nuovi prestiti per un ammontare $u(t)$, esclusivamente di categoria 1.

I valori dei coefficienti sono i seguenti:

$\alpha_{11} = 0.8$, $\alpha_{12} = 0.1$, $\alpha_{22} = 0.7$, $\alpha_{23} = 0.2$, $\alpha_{33} = 0.9$, $\alpha_{13} = \alpha_{21} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = 0$

$\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0.05$, $\beta_3 = 0.1$

a) Descrivere il fenomeno in esame mediante un sistema dinamico a tempo discreto, in cui $y(t)$ rappresenti l'ammontare delle nuove sofferenze nell'anno t.

b) Determinare il modello I/O del sistema.

c) Determinare (utilizzando il modello I/O) l'ammontare delle nuove sofferenze annue all'equilibrio se $u(t) = 100$.

→ NUMERO FINANZIAMENTI CONCESSI

$$x_1(t+1) = \alpha_{11} x_1(t) + \alpha_{21} x_2(t) + \alpha_{31} x_3(t) + u(t)$$

$$x_2(t+1) = \alpha_{12} x_1(t) + \alpha_{22} x_2(t) + \alpha_{32} x_3(t)$$

$$x_3(t+1) = \alpha_{13} x_1(t) + \alpha_{23} x_2(t) + \alpha_{33} x_3(t)$$

$$y(t) = \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t) + \beta_3 x_3(t)$$

$$x_1(t+1) = 0.8\, x_1(t) + u(t)$$

$$x_2(t+1) = 0.1\, x_1(t) + 0.7\, x_2(t)$$

$$x_3(t+1) = 0.2\, x_2(t) + 0.9\, x_3(t)$$

$$y(t) = 0.05\, x_2(t) + 0.1\, x_3(t)$$

- MODELLO I\O

$$x(t+1) \rightarrow z\,x(t)$$

$$z x_1 = 0.8\, x_1 + u$$

$$z x_2 = 0.1\, x_1 + 0.7\, x_2$$

$$z x_3 = 0.2\, x_2 + 0.9\, x_3$$

$$y = 0.05\, x_2 + 0.1\, x_3$$

$$(z - 0.8)\, x_1 = u \rightarrow x_1 = \frac{u}{z-0.8}$$

$$(z - 0.7)\, x_2 = 0.1\, x_1 \rightarrow x_2 = \frac{0.1\, x_1}{z-0.7}$$

$$(z - 0.9)\, x_3 = 0.2\, x_2 \rightarrow x_3 = \frac{0.2\, x_2}{z-0.9}$$

$$x_2 = \frac{0.1}{z-0.7}\,\frac{1}{z-0.8}\,u$$

$$x_3 = \frac{0.2}{z-0.9}\,\frac{0.1}{z-0.7}\,\frac{1}{z-0.8}\,u$$

$$y = 0.05\,x_2 + 0.1\,x_3$$

$$= u\left(\frac{0.05\cdot 0.1}{(z-0.7)(z-0.8)} + \frac{0.2\cdot 0.1\cdot 0.1}{(z-0.7)(z-0.8)(z-0.9)}\right)$$

$$= \boxed{\frac{0.005\,(z-0.9) + 0.002}{(z-0.7)(z-0.8)(z-0.9)}}\,u$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

DA QUI POSSO RICAVARE UNICA EQUAZIONE I/O