14 MARZO 2024
ESERCITAZIONE 3
STEFANO RADRIZZANI

ARGOMENTI: → STABILITÀ SISTEMI DINAMICI TEMPO CONTINUO

STABILITÀ SISTEMI DINAMICI

TEMPO CONTINUO

$$\dot{x} = A x + B u$$
$$y = C x + D u$$

→ UNICA MATRICE DI INTERESSE NELLO STUDIO DELLA STABILITÀ

A → CALCOLO IL POLINOMIO CARATTERISTICO

DENOMINATORE → F.D.T. SE NON CI SONO CANCELLAZIONI

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

CALCOLO GLI AUTOVALORI COME RADICI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO

⇓

→ CRITERIO DEGLI AUTOVALORI

1) ASINTOTICAMENTE STABILE

⇒ TUTTI AUTOVALORI CON PARTE REALE NEGATIVA

2) ALMENO UNO HA PARTE REALE POSITIVA

⇒ INSTABILE

3) CI SONO AUTOVALORI CON PARTE REALE NULLA

REGOLARI

SEMPLICE STABILITA'

IRREGOLARI

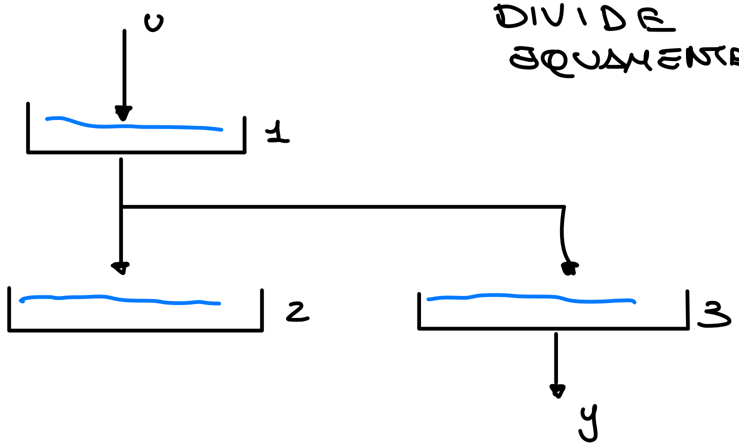
INSTABILE

TUTTI GLI ALTRI AUTOVALORI SONO CON PARTE REALE NEGATIVA

ESERCIZIO 1

$K = 1$
PORTATA SI DIVIDE EQUAMENTE

Σ_1



$$\dot{x}_1 = u - x_1$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{2} x_1$$
$$\dot{x}_3 = \frac{1}{2} x_1 - x_3$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(A) = \{-1, 0, -1\}$$

$\Rightarrow$ SISTEMA SEMPLICEMENTE STABILE

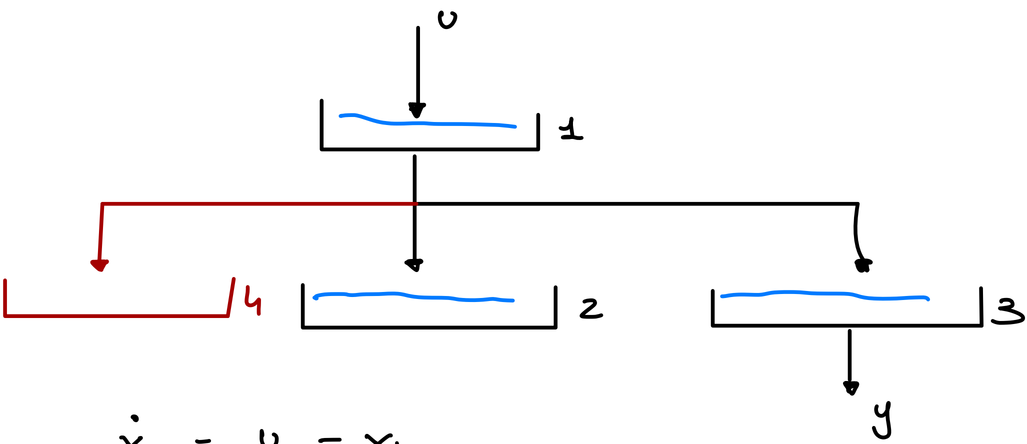
⇒ AUTOVALORI CON PARTE REALE NEGATIVA O NULLA

⇒ HO UN SOLO AUTOVALORE CON PARTE REALE NULLA

⇒ REGOLARE

MOTIVO : IL MOVIMENTO LIBERO DEL SERBATOIO DUE NON DIVERGE NE CONVERGE A ZERO.

Σ_2



$$\dot{x}_1 = u - x_1$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{3} x_1$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{3} x_1 - x_3$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{3} x_1$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(A) = \{-1,\ 0,\ -1,\ 0\}$$

$\Rightarrow$ TUTTI AUTOVALORI CON PARTE REALE NEGATIVA O NULLA

$\Rightarrow$ STUDIO LA MOLTEPLICITA' GEOM. DEGLI AUTOVALORI

$$p(\lambda) = (\lambda+1)^2 \lambda^2$$

$$\Downarrow$$

$$p(A) = (A+I)^2 A^2 = 0$$

se $$(A+I)^2 A = 0$$

$\Rightarrow$ GLI AUTOVALORI IN ZERO SONO REGOLARI

$$\overset{(A+I)}{\begin{bmatrix} -1+1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0+1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -1+1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0+1 \end{bmatrix}} \cdot \overset{(A+I)}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot$$

$$\cdot \overset{A}{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} = [0] \Rightarrow \text{REGOLARE}$$

$\Rightarrow$ SEMPLICEMENTE STABILE

RICORDA:

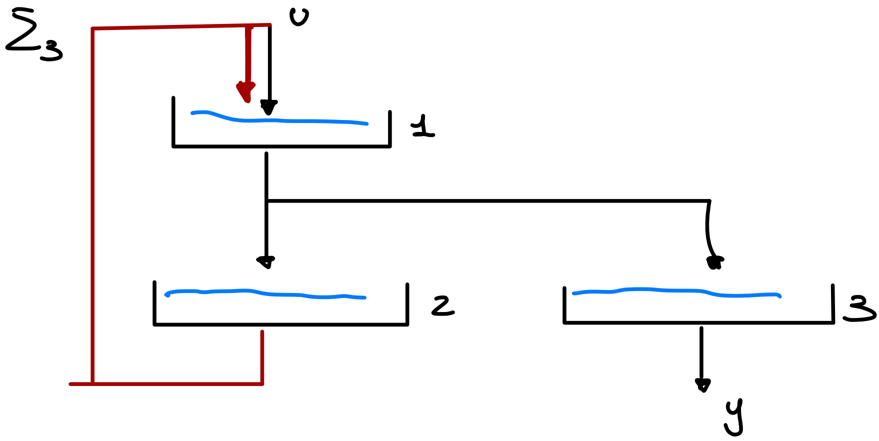
$$m_g(\lambda) = n - \text{rank}(A - \lambda I)$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow m_g(0) = n - \text{rank}(A)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{rank}(A) = 2$$

(DUE COLONNE DI ZERI O TRE RIGHE DIPENDENTI)



$$\dot{x}_1 = u - x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{2} x_1 - x_2$$

$$\dot{x}_3 = 1/2\, x_1 - x_3$$

$$A_1$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(A) = \{ -1 ,\ \lambda(A_1) \}$$

$$\lambda(A_1) \to \det(\lambda I - A_1) = p(\lambda)$$

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ -1/2 & \lambda + 1 \end{bmatrix} =$$

$$= (\lambda + 1)^2 - 1/2 =$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 1/2 =$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + 1/2 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 2}}{2} =$$

$$= -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lambda(A) = \left\{ -1, \ -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \ -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

$\Rightarrow$ TUTTI AUTOVALORI CON PARTE REALE NEGATIVA

ESERCIZIO 2

$$G(s) = \frac{3s+3}{3s^2+7s+2}$$

ASSUMENDO NON CI SIANO CANCELLAZIONI

$$p(\lambda) = 3\lambda^2 + 7\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{6} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{-7 \pm 5}{6}$$

SONO AUTOVALORI \ POLI CON PARTE REALE NEGATIVA

$\Rightarrow$ ASINTOTICAMENTE STABILE

ORDINE 2

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = 3\dot{u} + u$$

$$(s^2 + 5s + 4)y = (3s + 1)u$$

$$G(s) = \frac{3s + 1}{s^2 + 5s + 4}$$

ORDINE 2

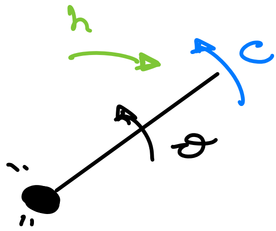
$\Rightarrow$ NON CI SONO CANCELLAZIONI

$$\Rightarrow \quad p(\lambda) = \lambda^2 + 5s + 4 = (\lambda + 4)(\lambda + 1)$$

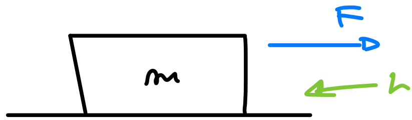
$$\Rightarrow \quad \lambda = \{-4, -1\}$$

$\Rightarrow$ ASINTOTICAMENTE STABILE

ESERCIZIO 3



BRACCIO MECCANICO CHE RUOTA INCERNIERATO IN UN PUNTO



BILANCIO DI COPPIE

$$\boxed{J\ddot{\vartheta} = c - h\dot{\vartheta}}$$

$$M\ddot{x} = F - h\dot{x}$$

$$\begin{cases} v = \dot{x} \\ M\dot{v} = F - h v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \dfrac{F}{m} - \dfrac{h}{M} v \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{h}{M} \end{bmatrix} \rightarrow \lambda(A) = \left\{ 0, -\dfrac{h}{M} \right\}$$

$\Rightarrow$ SEMPLICEMENTE STABILE

- $M\ddot{x} = F - h\dot{x}$

$$(Ms^2 + hs)\,x = F$$

$$G = \frac{1}{Ms^2 + hs} = \frac{1}{s(Ms + h)}$$

$\hookrightarrow$ non ci sono state cancellazioni

- F.D.T. TRA FORZA E VELOCITA'

$$M\ddot{x} = F - h\dot{x} \qquad \dot{x} = v$$
$$\ddot{x} = \dot{v}$$

$$M\dot{v} = F - hv$$

$$(Ms + h)\,v = F$$

$$G(s) = \frac{1}{Ms + h}$$

$\Rightarrow$ QUESTA F.D.T. NON VA

BENE PER STUDIARE LA STABILITÀ DEL SISTEMA COMPLESSIVO

2) $F = K(u - x)$ → nuovo ingresso

COME CAMBIA AL VARIARE DI K LA STABILITÀ ?

$$M\ddot{x} = F - h\dot{x} = k(u-x) - h\dot{x} = ku - kx - h\dot{x}$$

$$\dot{x} = v$$

$$M\dot{v} = ku - kx - hv$$

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = \frac{K}{M}u - \frac{K}{M}x - \frac{h}{M}v$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{h}{M} \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{K}{M} & \lambda + \frac{h}{M} \end{bmatrix} = 0$$

$$= \lambda\left(\lambda + \frac{h}{M}\right) + \frac{K}{M} = 0$$

$$= \lambda^2 + \frac{h}{M}\lambda + \frac{K}{M} = 0$$

$$\Rightarrow \quad M\lambda^2 + h\lambda + K = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 - 4MK}}{2M}$$

DATI I VALORI
DI h, M, K SONO
IN GRADO DI STUDIARE
LA STABILITA'

$M = 1, \; h = 4 \rightsquigarrow$ cosa cambia al variare di K

$$\lambda_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4k}}{2}$$

$$\lambda_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4 - k}$$

se $k > 4 \Rightarrow$ POLI COMPLESSI

$$\lambda_{1/2} = -2 \pm i\sqrt{k-4}$$

$\Rightarrow$ ASINTOTICAMENTE STABILE

se $k < 4 \Rightarrow$ POLI REALI

$$\lambda_1 = -2 + \sqrt{4-k}$$

$$\lambda_2 = -2 - \sqrt{4-k}$$

SEMPRE NEGATIVO $\quad k < 4$

$$\lambda_1 = -2 + \sqrt{4-k} > 0$$

$$\sqrt{4-k} > 2$$

$$4 - k > 4$$

$$k < 0$$

SE $k < 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0$

$\Rightarrow$ INSTABILE

SE $k = 0 \Rightarrow$ SEMPLICEMENTE STABILE

SE $k > 0$ e $k < 4$

$\Rightarrow$ ASINTOTICAMENTE STABILE

SE $k > 4 \Rightarrow$ ASINTOTICAMENTE STABILE CON AUTOVALORI COMPLESSI

ESERCIZI EXTRA

STUDIARE LA STABILITÀ DEI SEGUENTI SISTEMI

A_1 $\qquad$ B

(1) $$A = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

A_2

triangolare a blocchi

$$A = \begin{bmatrix} [A_1] & B \\ 0 & [A_2] \end{bmatrix}$$

$$\lambda(A) = \{\lambda(A_1) \cup \lambda(A_2)\}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A_1) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ -3 & s+2 \end{bmatrix} = (s-1)(s+2)+3 =$$

$$= s^2 - s + 2s - 2 + 3 =$$

$$= s^2 + s + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \frac{-1 \pm\sqrt{1-4}}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{<0} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\det(\lambda I - A_2) = \det\begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (\lambda+2)(\lambda+1)\lambda - (\lambda+2) =$$

$$= (\lambda+2)(\lambda^2+\lambda-1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = -2$$

$$\Rightarrow \lambda_{4/5} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$\lambda(A) = \Big\{ \underbrace{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}_{Re<0}, \underbrace{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}_{Re<0}, \underbrace{-2}_{<0},$$

$$\underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}}_{>0}, \underbrace{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}}_{<0} \Big\}$$

$>0 \Rightarrow$ INSTABILE!

2

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

A diagonale a blocchi

$$A = \begin{bmatrix} [A_1] & B \\ 0 & [A_2] \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(A) = \{\lambda(A_1) \cup \lambda(A_2)\}$$

diagonale a blocchi

$$\det(\lambda I - A_1) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 2 & 1 & \lambda+2 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda+2 \end{bmatrix} + 1 \det\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & \lambda+2 \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda\left(\lambda \cdot (\lambda+2) + 1\right) + 2 =$$

$$= \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2 =$$

$$= \lambda^2(\lambda+2) + \lambda + 2 =$$

$$= (\lambda^2+1)(\lambda+2) = 0$$

$$\lambda(A_1) = \{-2, \underbrace{+i, -i}_{\text{PARTE REALE NULLA}}\}$$

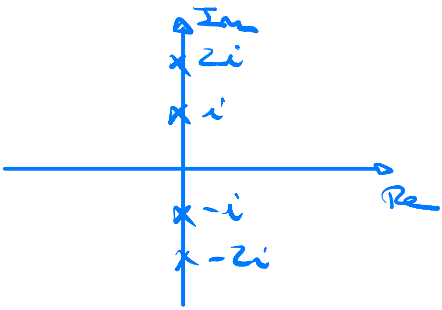
$$\det(\lambda I - A_2) = \det\begin{bmatrix} \lambda - 1 & +5 \\ -1 & \lambda + 1 \end{bmatrix} =$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda + 1) + 5 =$$

$$= \lambda^2 - 1 + 5 = \lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda(A_2) = \{-2i, +2i\}$$

$$\lambda(A) = \{-2, \underbrace{-2i, +2i, i, -i}_{\text{PARTE REALE NULLA}}\}$$



non sono coincidenti

$\Rightarrow$ S.S.

3

$$\dot{x}_1 = -x_1 + k_1x_2 + k_2x_3$$
$$\dot{x}_2 = k_1x_1 - 2x_2 - k_2x_3$$
$$\dot{x}_3 = -k_1x3$$

NOTE

Matrici a blocchi

* Diagonale a blocchi

$$\underset{n,n}{A} = \begin{array}{c}\\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} n_1 & n_2 \\ \left|\begin{array}{c:c} A_{11} & 0 \\ \hdashline 0 & A_{22} \end{array}\right| \end{array}\begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \end{array}$$

costruisco sulla diagonale principale due matrici quadrate. Le matrici (quadrate o rettangolari) costruite sull'antidiagonale hanno tutti elementi nulli

$n_1 + n_2 = n$

$$\{\lambda\}_A = \{\lambda\}_{A_{11}} \cup \{\lambda\}_{A_{22}}$$

* Triangolare a blocchi

sulla diagonale principale: 2 matrici quadrate
sulla anti-diagonale: almeno una matrice (quadrata o rettangolare) di elementi nulli

$$\underset{n,n}{A} = \left|\begin{array}{c:c} A_{11} & * \\ \hdashline 0 & A_{22} \end{array}\right|\begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} \quad \text{oppure} \quad \left|\begin{array}{c:c} A_{11} & 0 \\ \hdashline * & A_{22} \end{array}\right|\begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array}$$

$n_1 + n_2 = n$

$$\{\lambda\}_A = \{\lambda\}_{A_{11}} \cup \{\lambda\}_{A_{22}}$$