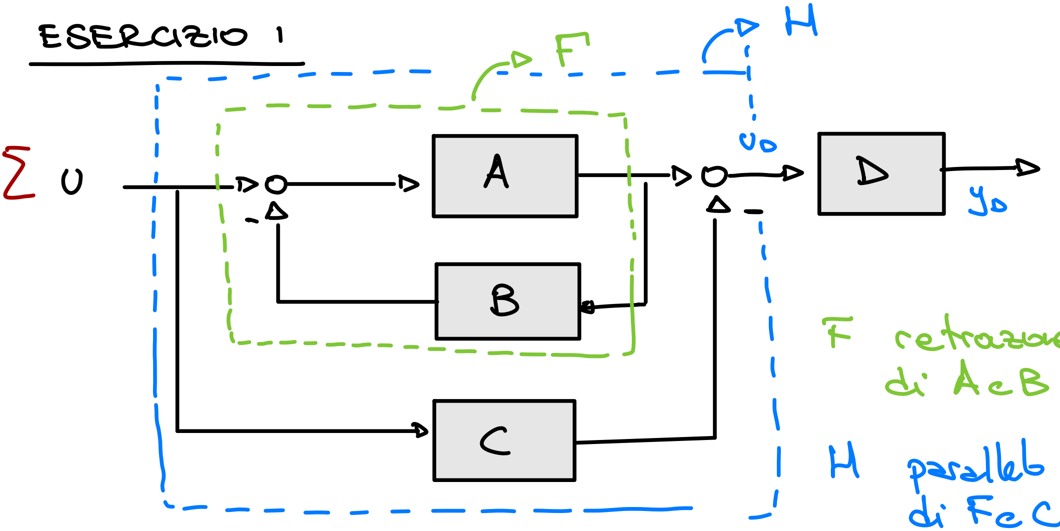
28 MARZO 2024
ESERCITAZIONE 5
STEFANO RADRIZZANI

ARGONENTI :

→ SCHEMI A BLOCCHI

→ SISTEMI NONLINEARI

ESERCIZIO 1



F retrazione di A e B

H parallelo di F e C

Σ serie di H e D

A) $G_A = \dfrac{1}{s-1}$

D) $\dot{y}_D + 2y_D = -\dot{u}_D$

C) $A_c = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ $B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$C_c = [\,1 \quad 1 \quad 1\,]$ $D_c = 0$

a) PROPORRE UNA F.D.T. PER IL BLOCCO B DI ORDINE 1 AFFINCHÉ IL SISTEMA COMPLESSIVO SIA ASINTOTICAMENTE STABILE

Σ È SERIE DI H e D

$\Rightarrow$ H e D DEVONO ESSERE A.S.

$$\dot{y}_D + 2y_D = -\dot{u}_D$$

$$(s+2)y_D = -s\,u_D$$

$$G_D(s) = \frac{-s}{s+2}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{s} = -2 \quad \Rightarrow \quad A.S.$$

POLO DI D

H È IL PARALLELO DI C E F

$\Rightarrow$ F E C DEVONO ESSERE A.S.

$$A_c = \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

A_1

$$\lambda(A_c) = \{-1,\ \lambda(A_1)\}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} tr(A_1) = -2 < 0 \\ \det(A_1) = 1 + 1 = 2 > 0 \end{array}$$

$$p(\lambda_1) = \det(\lambda I - A_1) = $$

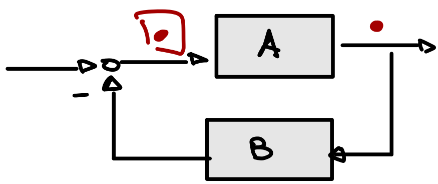
$$\overset{!}{=} \lambda^2 - tr(A_1)\, s + \det(A_1)$$

C.N.S. PER STABILITÀ

$$\begin{cases} -tr(A_1) > 0 & \rightarrow \quad tr(A_1) < 0 \\ \det(A_1) > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ C È A.S.

$\Rightarrow$ F DEVE ESSERE A.S.



$$G_A = \frac{1}{s-1}$$

LA RETROAZIONE SPOSTA I POLI DI F RISPETTO ALL'UNIONE DI A e B

$$G_B(s) = \frac{\alpha}{s+\beta}$$

ALTERNATIVA

$$G_B(s) = \frac{s+\alpha}{s+\beta} \cdot k$$

$$G_F(s) = \frac{\text{LINEA DI ANDATA}}{1 + \text{ANELLO}}$$

↳ retroazione negativa

$$G_F(s) = \frac{G_A}{1 + G_A G_B}$$

$$G_F(s) = \frac{\frac{1}{s-1}}{1 + \frac{1}{s-1} \frac{\alpha}{s+\beta}}$$

$$= \frac{s+\beta}{(s-1)(s+\beta)+\alpha}$$

↳ CALCOLIAMO I POLI

$$s^2 - s + \beta s - \beta + \alpha = 0$$

$$s^2 + (\beta - 1)s + \alpha - \beta = 0$$

$\Rightarrow$ CONDIZIONI DI STABILITA'

$$\begin{cases} \beta - 1 > 0 \\ \alpha - \beta > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha > \beta > 1}$$

b) SE IL BLOCCO D DIVENTA

$$\dddot{y}_D + \ddot{y}_D + \dot{y}_D + 2y_D = -\dot{u}_D$$

CAMBIA LA STABILITA' ?

D DEVE ESSERE A.S. PER AVERE Σ A.S.

$$(s^3 + s^2 + s + 2)\, y_D = -s u_D$$

$$G_D = \frac{-s}{s^3 + s^2 + s + 2}$$

$\Rightarrow$ STUDIO LE RADICI DI

$$s^3 + s^2 + s + 2 = 0$$

$\Rightarrow$ ORDINE $3 > 2$

$\Rightarrow$ CRITERIO DI HURWITZ

HO VERIFICATO PRIMA CHE TUTTI I COEFFICIENTI DEL POLINOMIO SIANO CONCORDI E NON NULLI

$$\alpha_0 s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3 = 0$$

$$H = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$H_1 = \alpha_1 > 0$ ✓

$\det(H_2) = \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_3 > 0$

PIÙ SEMPLICEMENTE $\alpha_i > 0 \; i$

$\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_3 > 0$

$\det(H) = \alpha_3 \det(H_2) > 0 \rightarrow \alpha_3 > 0$ ✓

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0 = 1 \qquad \alpha_3 = 2$

$1 - 2 > 0$ ✗ $\Rightarrow D$ **non** e' A.S.

$\Rightarrow \Sigma$ **non** e' A.S.

ESERCIZIO 2

$$\dot{x} = x - x^2 + p \qquad p \in \mathbb{R}$$

a) CALCOLARE GLI EQUILIBRI

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow \bar{x} - \bar{x}^2 + p = 0$$

$$\bar{x}^2 - \bar{x} - p = 0$$

VERIFICARE SE LA SOLUZIONE E' REALE $\Leftarrow \quad \bar{x}_{1/2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4p}}{2}$

$1 + 4p > 0$

$\Rightarrow p > -\dfrac{1}{4}$

b) STUDIARE LA STABILITA' DEGLI EQUILIBRI AL VARIARE DI p

$\Rightarrow$ DEVO STUDIARE LA STABILITA' DI OGNI EQUILIBRIO

1) SISTEMA LINEARIZZATO

$$A_{LIN} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x}}$$

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$A_{LIN} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - x^2 + p\right)$$

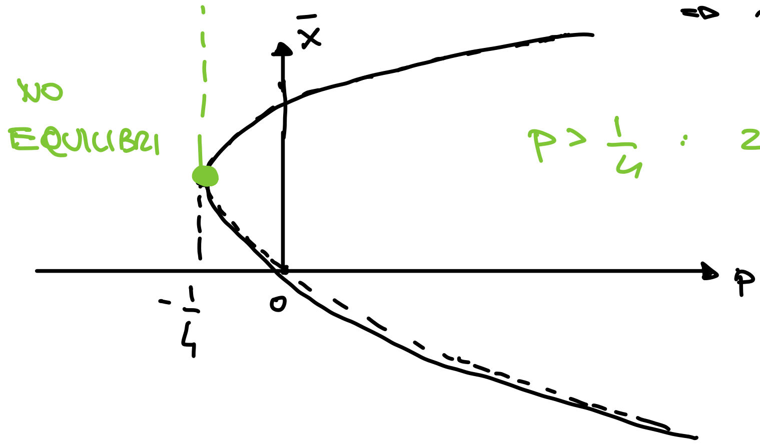
$$= \left[1 - 2x\right]_{\bar{x}}$$

$$A_{LIN}(\bar{x} = \bar{x}_1) \quad e \quad A_{LIN}(\bar{x} = \bar{x}_2)$$

$\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ ESISTONO se $p > -\frac{1}{4}$

$$\bar{x}_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4p}}{2} \rightarrow x - x^2 + p = 0$$

$$\Rightarrow p = x^2 - x$$



se $p < -\frac{1}{4}$ non ci sono equilibri

se $p > -\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ DUE EQUILIBRI

$$A_{lin} = 1 - 2\bar{x}$$

$$\bar{x}_1 \Rightarrow A_{lin} = 1 - 2\left[\frac{1 + \sqrt{1+4p}}{2}\right]$$

$$= 1 - 1 - \sqrt{1+4p} =$$

$$= -\sqrt{1+4p} < 0$$

$\Rightarrow$ EQUILIBRIO ASINTOTICAMENTE STABILE

$$\bar{x}_2 \Rightarrow A_{lin} = 1 - 2\left[\frac{1 - \sqrt{1+4p}}{2}\right]$$

$$= \sqrt{1+4p} > 0$$

$\Rightarrow$ EQUILIBRIO INSTABILE

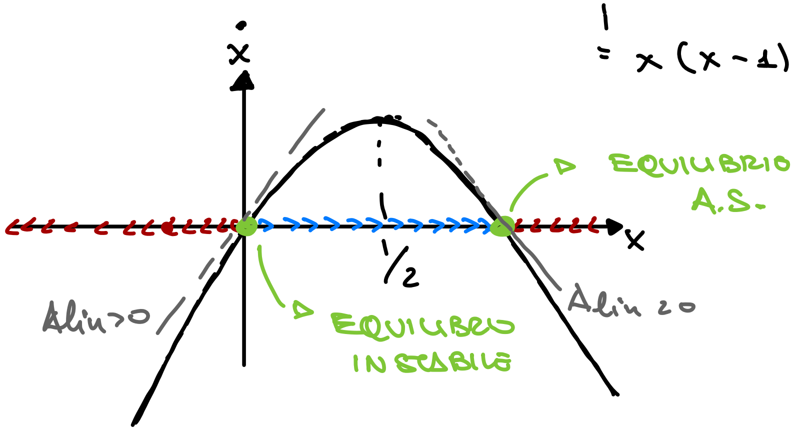
$$\text{se} \quad p = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{UN} = 1 - 2\left[\frac{1 \pm \underbrace{\cancel{\sqrt{1-4p}}}_{=0}}{2}\right] = 1 - 1 = 0$$

$\Rightarrow$ non possiamo dire nulla sulla stabilità!

ALTERNATIVA: metodo grafico

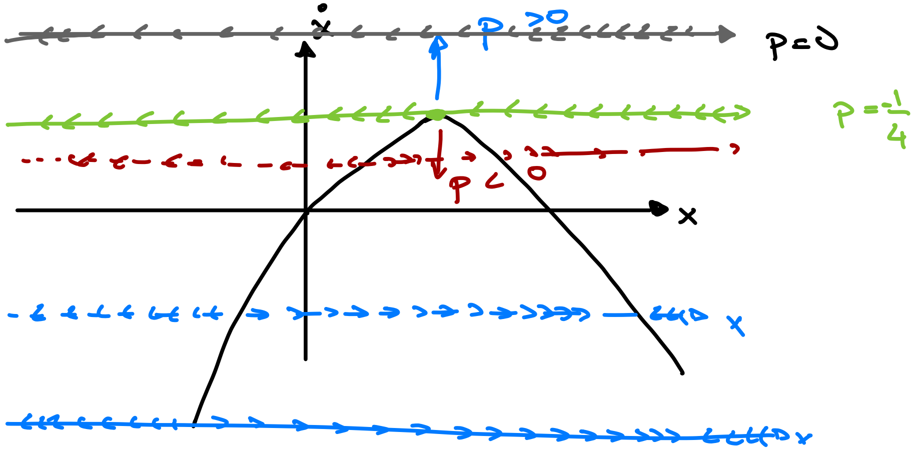
$$\dot{x} = x - x^2 + p \qquad p=0 \qquad \dot{x} = x - x^2 = x(x-1)$$

$p=0$



$$f(x) = x - x^2$$

$$f'(x) = 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1/2$$

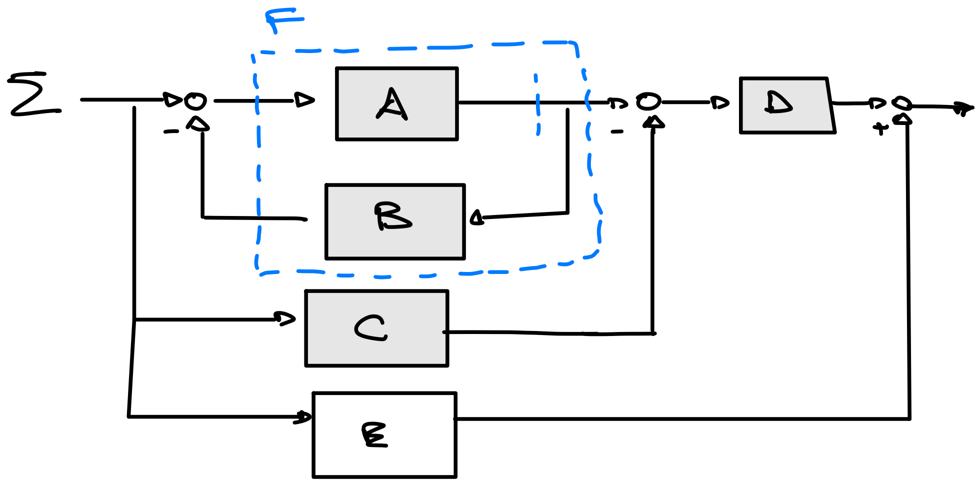


DAL METODO GRAFICO POSSO DIRE CHE L'EQUILIBRIO NON E' STABILE PER

$$p = -\frac{1}{4}$$

(LE FRECCE NON CONVERGONO) !

ESERCIZIO EXTRA #1



$$G_A = \frac{10}{s-1} \qquad G_B = \frac{s}{s-2}$$

$$\ddot{y}_c + \dot{y}_c + 4y_c = -4\dot{u}_c + 2u_c$$

$$A_E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B_E = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$C_E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D_E = 0$$

1) PROPORRE D DI ORDINE 2 AFFINCHÈ IL SISTEMA Σ SIA A.S.

Σ è A.S. SE E SOLO SE

D, E, C, F SONO A.S.

F)

$$G_F = \frac{G_A}{1 + G_A G_B} = \frac{\frac{10}{s-1}}{1 + \frac{10}{s-1} \cdot \frac{s}{s-2}} = \frac{10(s-2)}{(s-1)(s-2) + 10s} =$$

$$= \frac{10(s-2)}{s^2 - 3s + 2 + 10s} = \frac{10(s-2)}{s^2 + 7s + 2}$$

$\Downarrow$

COEFFICIENTI CONCORDI E NON-NULLI

$\Downarrow$

A.S.

c) $\ddot{y}_c + \dot{y}_c + 4y_c = -4\dot{u}_c + 2u_c$

$$\Rightarrow \quad G_c = \frac{2 - 4s}{s^2 + s + 4}$$

$\Downarrow$

COEFFICIENTI CONCORDI E NON-NULLI

$\Downarrow$

A.S.

E) $$A_E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(A_E) = \{-1, \{-2, -1, -2\}\}$$

$\Rightarrow$ AUTOVALORI CON PARTE REALE NEGATIVA

$\Rightarrow$ A.S.

D) SCELGO D DI ORDINE 2 A.S.

$$G_D = \frac{N(s)}{s^2 + \alpha s + \beta}$$

$\Rightarrow \alpha > 0, \ \beta > 0 \quad \forall N(s)$

es: $G_D = \dfrac{1}{(s+1)^2}$

2) COME CAMBIA LA STABILITA' SE C DIVENTA $\dddot{y}_c + \ddot{y}_c + \dot{y}_c + 4y_c = -4\dot{v}_c + 2v_c$

$$G_c = \frac{2 - 4s}{s^3 + s^2 + s + 4}$$

$\alpha_0 s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3$

$\Rightarrow$ HURWITZ :

$D_1 \quad D_2$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(D_1) = 1 > 0$$

$$\det(D_2) = 1 - 4 < 0 \quad \Rightarrow \text{INSTABILE}$$

o più semplicemente

$$\alpha_i > 0 \quad \forall i$$

e $\underbrace{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_3}_{\det(D_2)} > 0$

ESERCIZIO EXTRA #2

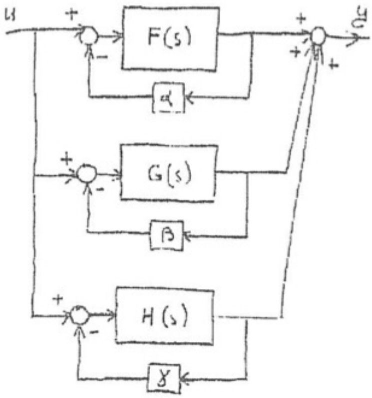
Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura, in cui

$$F(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2+2s-2}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^3+2s^2+2s-1}$$

mentre α, β, γ sono coefficienti reali.



a) Determinare, motivando adeguatamente la risposta, per quali valori della terna (α, β, γ) il sistema in figura è asintoticamente stabile.
b) Determinare la funzione di trasferimento complessiva del sistema, esprimendola in funzione di F, G, H, α, β, γ.

a) R_F = retroazione $F-\alpha$
R_G = " $G-\beta$
R_H = " $H-\gamma$

R_F, R_G e R_H sono connessi in parallelo
Pertanto Σ è asint. stab. $\Leftrightarrow$ lo sono R_F, R_G e R_H

$$R_F = \frac{F}{1+\alpha F} = \frac{\frac{1}{s-1}}{1+\frac{\alpha}{s-1}} = \frac{1}{s-1+\alpha} \qquad \text{as. stab} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

$$R_G = \frac{G}{1+\beta G} = \frac{1}{s^2+2s-2+\beta} \qquad \text{as. stab} \Leftrightarrow \beta > 2$$

$$R_H = \frac{H}{1+\gamma H} = \frac{1}{s^3+2s^2+2s-1+\gamma} \qquad \text{as stab.} \underset{\text{HURWITZ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -1+\gamma > 0 \\ 4 > -1+\gamma \end{cases}$$

cioè $1 < \gamma < 5$

Pertanto Σ è as. stab $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ \beta > 2 \\ 1 < \gamma < 5 \end{cases}$

b) $$R_{TOT} = R_F + R_G + R_H = \frac{F}{1+\alpha F} + \frac{G}{1+\beta G} + \frac{H}{1+\gamma H}.$$

ESERCIZIO EXTRA #3

$$\dot{x} = -y - 2x + x^3$$
$$\dot{y} = y - px$$

1) STUDIARE EQUILIBRI E STABILITA' AL VARIARE DI p

$$0 = -\bar{y} - 2\bar{x} + \bar{x}^3$$
$$0 = \bar{y} - p\bar{x}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = p\bar{x}$$

$$\Rightarrow -p\bar{x} - 2\bar{x} + \bar{x}^3 = 0$$

$\Rightarrow \bar{x} = 0$ oppure $\bar{x}^2 - 2 - p = 0$

$\Rightarrow \bar{x} = \pm\sqrt{p+2}$
SOLO SE
$p \geq -2$

\
\

$p > -2$

EQUILIBRI $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \sqrt{p+2} \\ \sqrt{p+2} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -\sqrt{p+2} \\ -\sqrt{p+2} \end{bmatrix}$

$\downarrow A \quad \downarrow B \quad \downarrow C$

$p < -2$

EQUILIBRIO $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\uparrow A$

$$A_{LIN} = \begin{bmatrix} -2 + 3\bar{x}^2 & -1 \\ -p & +1 \end{bmatrix}$$

• $A_{LIN}(A) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -p & +1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \det(A_{LIN}) = -2 - p > 0 \rightarrow p < -2$

$\Rightarrow \operatorname{tr}(A_{LIN}) = -1 < 0 \quad \forall p$

se $\det(A_{LIN}) = 0 \Rightarrow p = -2$

$\Rightarrow$ NON POSSO DIRE NULLA

↳ AUTOVALORE IN ZERO

- $A_{LIN}(B) = \begin{bmatrix} 4+3p & -1 \\ -p & 1 \end{bmatrix} = A_{LIN}(C)$

$\Rightarrow \det(A_{LIN}) = 4+3p-p > 0$

$\Rightarrow p > -2$ ok

$\Rightarrow tr(A_{LIN}) = 5+3p < 0$

$\Rightarrow p < -5/3$

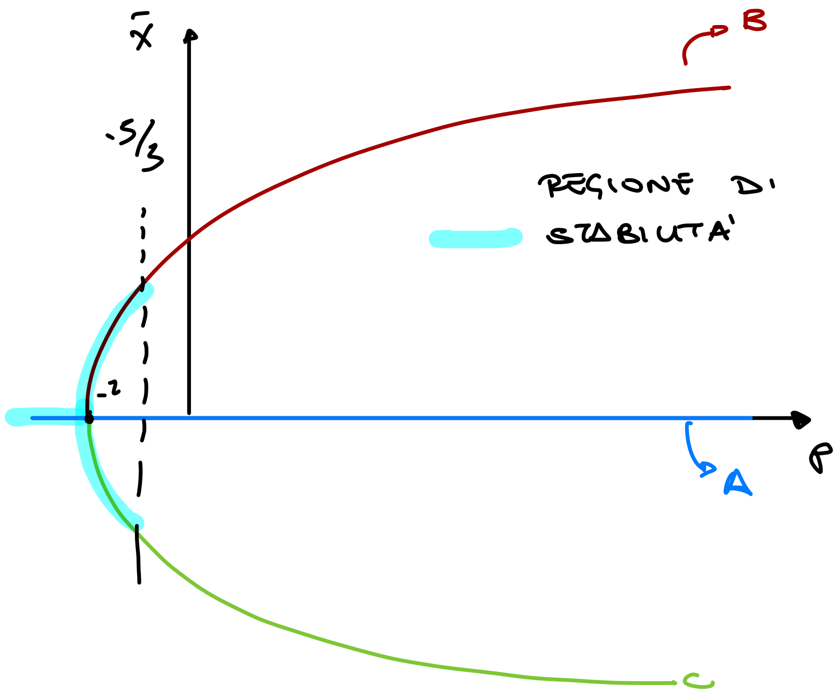
se $tr(A_{LIN}) = 0 \Rightarrow p = -\frac{5}{3}$

$\Rightarrow$ NON POSSO DIRE NULLA

↳ autovalori con parte reale nulla

	A	B	C
$p < -2$	A.S.	/	/
$p = -2$	?	/	/
$-2 < p < -\frac{5}{3}$	INST	A.S.	A.S.
$p = -5/3$	INST	?	?
$p > -5/3$	INST	INST	INST

GRAFICAMENTE POSSO RIASSUMERE



ESERCIZIO EXTRA #4

Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo continuo di ordine $n = 2$:

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1$$
$$\dot{x}_2 = 2x_2 - x_2^3 - x_1$$

Determinare gli stati di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità con il metodo della linearizzazione

---

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

equilibri: $\begin{cases} x_2 = x_1 \\ 2x_2 - x_2^3 - x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{x}' = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \bar{x}'' = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \bar{x}''' = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}$

Jacobiano $A(x) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2-3x_2^2 \end{vmatrix}$

(tc, $n=2$ → uso il criterio tr/det)

$A(\bar{x}') = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ $\left.\begin{matrix} \text{tr}A > 0 \\ \det A < 0 \end{matrix}\right\}$ $\bar{x}'$ INSTABILE

$A(\bar{x}'') = A(\bar{x}''') = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$ $\left.\begin{matrix} \text{tr}A < 0 \\ \det A > 0 \end{matrix}\right\}$ $\bar{x}'', \bar{x}'''$ ASINT. STABILI

ESERCIZIO EXTRA #5

Si consideri il seguente sistema a tempo continuo:

$$\dot{x} = 2(x - y)$$
$$\dot{y} = x^2 - 4x - y$$

a) Determinare gli stati di equilibrio.
b) Studiarne la stabilità mediante linearizzazione.

a) $\begin{cases} 2(x-y) = 0 \\ y = x^2 - 4x \end{cases} \Rightarrow \bar{x}' = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \bar{x}'' = \begin{vmatrix} 5 \\ 5 \end{vmatrix}$

b) $J = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2x-4 & -1 \end{vmatrix}$

$J(\bar{x}') = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}$ $\quad \lambda^2 - \lambda - 10 = 0$

$\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{41}}{2} \cong \begin{cases} 3.70 \\ -2.70 \end{cases}$ INSTABILE

$J(\bar{x}'') = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$ $\quad \lambda^2 - \lambda + 10 = 0$

$\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 40}}{2} = \dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{39}}{2}$ INSTABILE

ESERCIZIO EXTRA #6

Nel seguente sistema a tempo continuo di ordine 1, $x(t)$ rappresenta la frazione (rispetto al totale della popolazione) di acquirenti di un certo prodotto ($0 \leq x(t) \leq 1$). La creazione di nuovi acquirenti avviene per "contagio" (passa-parola) tra gli acquirenti x e i non acquirenti $(1-x)$.

$$\dot{x} = -x + px(1-x)$$

a) Determinare, per tutti i $p > 0$, gli stati di equilibrio del sistema e rappresentarli in un piano (p, x).
b) Discutere, per tutti i $p > 0$, la stabilità degli stati di equilibrio determinati al punto a).

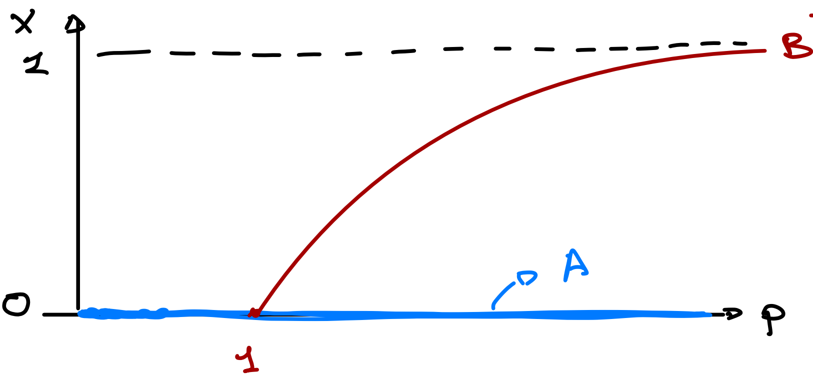
a) $$0 = -\bar{x} + p\bar{x}(1-\bar{x})$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x} = 0 \quad A$$

oppure

$$-1 + p - p\bar{x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{p-1}{p} = 1 - \frac{1}{p} \quad B$$



b) $A_{LIN} = -1 + p - 2p\bar{x}$

$A_{LIN}(A) = -1 + p < 0$

$\Rightarrow p < 1$

$A_{LIN}(B) = -1 + p - 2p + 2 =$

$= -p + 1 < 0$

$\Rightarrow p > 1$

$p = 1 \Rightarrow A_{LIN}(A) = A_{LIN}(B) = 0$

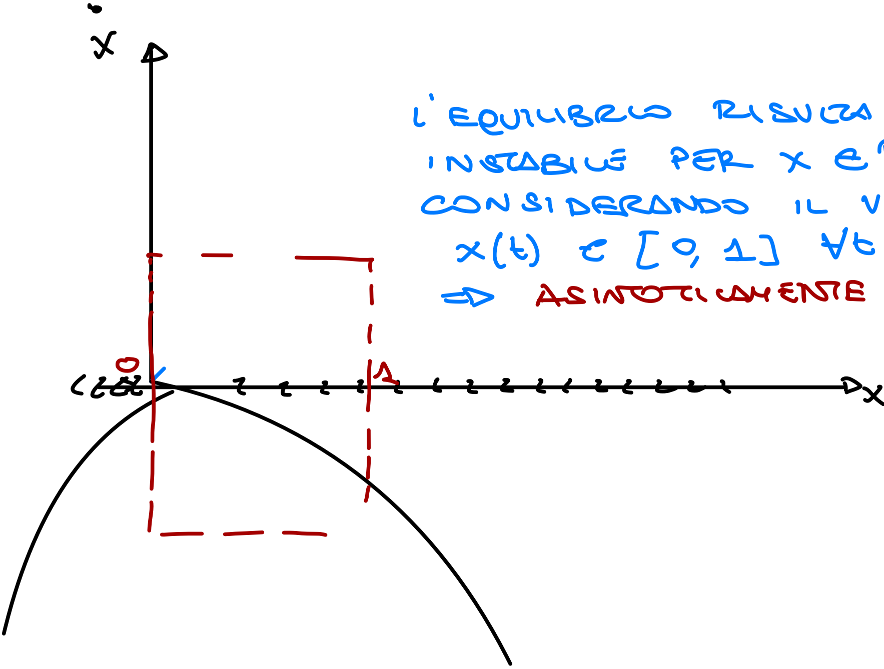
$\Rightarrow$?

PER $p = 1$

POSSO USARE IL
METODO GRAFICO

$$\dot{x} = -x + x(1-x) =$$

$$= \cancel{-x} + \cancel{x} - x^2$$



L'EQUILIBRIO RISULTA INSTABILE PER $x \in \mathbb{R}$

CONSIDERANDO IL VINCOLO $x(t) \in [0, 1]$ $\forall t$

$\Rightarrow$ ASINTOTICAMENTE STABILE