18 APRILE 2024
ESERCITAZIONE 6
STEFANO RADRIZZANI

ARGOMENTI:

→ RAGGIUNGIBILITÀ

→ OSSERVABILITÀ

RAGGIUNGIBILITÀ E OSSERVABILITÀ

RAGGIUNGIBILITÀ → CAPACITÀ DI MANIPOLARE LO STATO ATTRAVERSO L'INGRESSO

OSSERVABILITÀ → CAPACITÀ DI VEDERE LO STATO ATTRAVERSO L'USCITA

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

n : ORDINE DEL SISTEMA

MATRICE DI RAGGIUNGIBILITÀ

$$R = [\,B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B\,]$$

non dipende da C

MATRICE DI OSSERVABILITÀ

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

non dipende da B

- IL SISTEMA È COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE SE

$$\det(R) \neq 0$$

- IL SISTEMA È COMPLETAMENTE OSSERVABILE SE

$$\det(O) \neq 0$$

SE IL SISTEMA E' COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE

$\Rightarrow$ POSSO SCEGLIERE K PER ASSEGNARE GLI AUTOVALORI DI TUTTI

$(A + BK)$

$\dot{x} = Ax + Bu$

$\underbrace{u = Kx}_{\text{LEGGE DI CONTROLLO}}$

$$\dot{x} = Ax + BKx \overset{!}{=} (A + BK)x$$

$\hookrightarrow$ MATRICE DI STATO DEL SISTEMA CONTROLLATO DA $u = Kx$

ESERCIZIO 1

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1) STUDIARE LA STABILITA'

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) =$$

$$= \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A)$$

$$\left. \begin{array}{l} tr(A) < 0 \\ \det(A) > 0 \end{array} \right\} \text{PER A.S.}$$

$tr(A) = 0 \Rightarrow$ NON A.S.

$\det(A) = -1 - 2 = -3 < 0$

$\lambda^2 - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ SISTEMA INSTABILE

2) STUDIARE LA RAGGIUNGIBILITA'

$$R_1 = [\, B \;|\; A^1 \cdot B \,] \qquad 1 = n-1$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(R) = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ IL SISTEMA E' RAGGIUNGIBILE

3) DIRE SE CON UNA LEGGE DI CONTROLLO $u = Kx + v$ E' POSSIBILE STABILIZZARE IL SISTEMA, SCEGLIENDO K

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad u = Kx + v$$

$$\dot{x} = Ax + BKx + Bv = (A + BK)x + Bv$$

LA MATRICE DI STATO DEL SISTEMA CONTROLLATO È $A + BK$

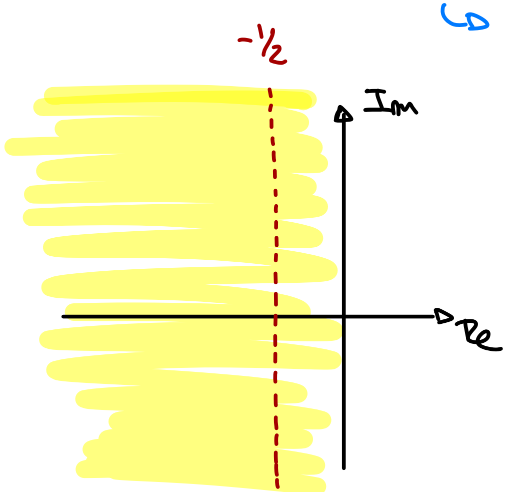
SICCOME IL SISTEMA È RAGGIUNGIBILE POSSO SCEGLIERE K PER AVERE TUTTI GLI AUTOVALORI CON PARTE REALE NEGATIVA

$\Rightarrow$ POSSO STABILIZZARE IL SISTEMA

2) POSSO SCEGLIERE K PER AVERE UN TEMPO DI RISPOSTA INFERIORE A 10 s

$$T_R = 5\, T_D$$

$\hookrightarrow$ TEMPO DEL POLO DOMINANTE



$$T_D = \frac{1}{|Re\{\lambda_D\}|}$$

$\Downarrow$

AUTOVALORE CON PARTE REALE PIÙ A DESTRA

$\Rightarrow$ SCELGO <u>ARBITRARIAMENTE</u>

DI POSIZIONARE GLI AUTOVALORI

IN -1

$$(A + BK) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [K_1 \quad K_2] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_1 & K_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + K_1 & 1 + K_2 \\ 2 + K_1 & K_2 - 1 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - tr(A + BK) + det(A + BK) =$$

$$= (\lambda - 1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

IMPONGO CHE IL SISTEMA ABBIA I POLI SCELTI

$$\begin{cases} -tr(A + BK) = \boxed{2 = -(1 + K_1 + K_2 - 1) = -(K_1 + K_2)} \\ det(A + BK) = \boxed{1 = (1 + K_1)(K_2 - 1) - (1 + K_2)(2 + K_1)} \end{cases}$$

$\parallel$

$\Downarrow$

SISTEMA DI EQUAZIONI
DA RISOLVERE

5) SUPPONIAMO CHE $y = x_1$

E LA LEGGE DI CONTROLLO È $u = ky$

POSSIAMO STABILIZZARE IL SISTEMA ?

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$u = ky = kx_1$$

LO SCALARE

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u = x_1 + x_2 + kx_1 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 + u = 2x_1 - x_2 + kx_1 \end{cases}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1+k & 1 \\ 2+k & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} tr(\tilde{A}) < 0 \\ det(\tilde{A}) > 0 \end{cases}$$

$$\cancel{1} + k \cancel{-1} < 0 \Rightarrow \boxed{k < 0}$$

$$-(1+k) - (2+k) > 0$$

$$-1 - k - 2 - k > 0$$

$$-3 > 2k \Rightarrow \boxed{k < -\frac{3}{2}}$$

$$\begin{cases} k < 0 \\ k < -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{k < -\frac{3}{2}}$$

$\Rightarrow$ CON $y = x_1$

$u = k y$

SIAMO COMUNQUE IN GRADO DI STABILIZZARE IL SISTEMA

ESERCIZIO 2

$$\dot{x} = Ax \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$y = Cx$$

1) È POSSIBILE RICOSTRUIRE ASINTOTICAMENTE LO STATO DEL SISTEMA

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \cancel{B}u - L(y - \hat{y}) \qquad B=0$$
$$\hat{y} = C\hat{x}$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} - Ly + LC\hat{x}$$
$$\dot{\hat{x}} = (A + LC)\hat{x} - Ly$$

$\Downarrow$

SE IL SISTEMA È OSSERVABILE POSSO SCEGLIERE GLI AUTOVALORI DI $A+LC$ E QUINDI AVERE UN OSSERVATORE STABILE DELLO STATO

$\Downarrow$

SE $(A+LC)$ È A.S.

$$\Rightarrow \underbrace{\hat{x} \rightarrow x}_{\text{RICOSTRUZIONE ASINTOTICA DELLO STATO}}$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA^{1} \end{bmatrix} \qquad 1 = n - 1$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathcal{O}) = 3 + 1 = 4 \neq 0$$

$\Rightarrow$ IL SISTEMA E' OSSERVABILE

3) TROVARE CONDIZIONI SU L AFFINCHE' $(A + LC)$ SIA A.S.

$$\tilde{A} = A + LC = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 & l_1 \\ l_2 & l_2 \end{bmatrix} =$$

$$\vdots = \begin{bmatrix} -1 + l_1 & 2 + l_1 \\ l_2 & 1 + l_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} tr\,(A + LC) & 20 \\ det\,(A + LC) & > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ SICCOME IL SISTEMA E' OSSERVABILE $\exists$ SOLUZIONE

4) SCEGLIERE l_1, l_2 PER AVERE UN OSSERVATORE DELLO STATO CHE RICOSTRUISCA LO STATO IN 10S

$\Rightarrow$ SCELGO GLI AUTOVALORI DI $\tilde{A}$ REALI E COINCIDENTI IN -1

$$\Rightarrow tr\,(A + LC) = \cancel{-1} + l_1 \cancel{+1} + l_2 = -2$$

$$\Rightarrow det\,(A + LC) = (-1 + l_1)(1 + l_2) - l_2 (2 + l_1) =$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow l_1 = -l_2 - 2$$

$$\Rightarrow (-3 - l_2)(1 + l_2) - l_2 (2 - 2 - l_2) = 1$$

$$\Rightarrow -3 - l_2 - 3l_2 \cancel{- l_2^2} \cancel{+ l_2^2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad -4\, l_2 = 4$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{l_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad l_1 = -1}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\hat{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A+LC} \hat{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{-L} y$$

VERIFICA: $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 =$

$$= (\lambda + 1)^2$$

CALCOLO AUTOVALORI DI $A + LC$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = -1 \quad \underline{ok}$$

ESERCIZIO 3

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ p \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1) STUDIARE LA STABILITÀ INTERNA ED ESTERNA

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(A) = \{-2, -3, 1\}$$

INSTABILE INTERNAMENTE

PER STUDIARE LA STABILITÀ ESTERNA CALCOLO LA F.D.T.

$$G(s) = \frac{s + (p-1)}{(s-1)(s+2)(s+3)}$$

se $p = 0$

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

con questa cancellazione
non vedo la parte instabile
del sistema nell'uscita.

SE NON CI SONO CANCELLAZIONI

$\Rightarrow$ SISTEMA OSSERVABILE E
RAGGIUNGIBILE.

$p - 1 = -1 \Rightarrow p = 0$

$p - 1 = 2 \Rightarrow p = 3$

$p - 1 = 3 \Rightarrow p = 4$

$p \rightarrow B \rightarrow R \Rightarrow$ cancellazioni
date da
NON RAGGIUNGIBILITÀ

⇒ LE CANCELLAZIONI SONO DOVUTE ALLA ~~NON~~ RAGGIUNGIBILITA'

$R = [B \quad AB \quad A^2B]$ → VERIFICARE CHE $\det(R) = 0$ PER $p = 0$, $p = 3$, $p = 4$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ C^2A \end{bmatrix}$$

$$R = (\text{conti}) = \left[\begin{array}{ccc} 1 & p-2 & 4-p \\ 0 & 1 & p-5 \\ p & p & p \end{array}\right] \begin{array}{cc} 1 & p-2 \\ 0 & 1 \\ p & p \end{array}$$

$$\det(R) = p + p(p-2)(p-5) - p(4-p) + - p(p-5) =$$

$$= p\left(1 - 4 + \cancel{p} - \cancel{p} + 5 + p^2 - 7p + 10\right) =$$

$$= p\left(p^2 - 7p + 12\right) = 0$$

$$= p(p-3)(p-4) = 0$$

$$\Rightarrow \det(R) = 0 \rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ p = 3 \\ p = 4 \end{cases}$$