24 APRILE 2024
ESERCITAZIONE 7
STEFANO RADRIZZANI

ARGOMENTI : $\longrightarrow$ RAGGIUNGIBILITÀ, OSSERVABILITÀ

ESERCIZIO 1

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad A = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1) DIRE SE IL SISTEMA E' ALMENO STABILIZZABILE AL VARIARE DI α

$$R = [\, B \quad AB \,]$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad AB = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det(R) = 0 \Rightarrow$ NON RAGGIUNGIBILE

$\Rightarrow$ SE $u = Kx$ NON POSSIAMO ASSEGNARE GLI AUTOVALORI DI $A + BK$

$\Rightarrow$ SE SCEGLIENDO OPPORTUNAMENTE K RIUSCIAMO COMUNQUE AD AVERE AUTOVALORI A.S.

$\Rightarrow$ STABILIZZABILE

$$A + BK = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ -1 + K_2 & 2 + K_2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(A + BK) = \{ -\alpha \, , \; 2 + K_2 \}$$

$$2 + K_2 < 0 \implies \boxed{K_2 < -2}$$

$\boxed{\text{$K_2 < -2$ PERMETTE DI STABILIZZARE IL SISTEMA QUANDO $\alpha > 0$}}$

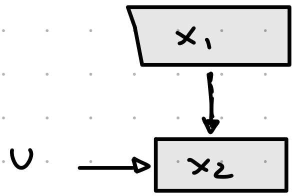
$$\lambda(A) = \{ -\alpha \, , \; 2 \}$$

AUTOVALORE NON MODIFICABILE DA UNA LEGGE DI CONTROLLO $u = Kx$

GRAFICAMENTE :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 + u \end{cases}$$

$\Rightarrow$ x_1 EVOLVE INDIPENDENTEMENTE DA u E x_2



ES : $y = x_2$ $\Rightarrow$ POSSO VERIFICARE CI SIANO CANCELLAZIONI

$$s X_1 = -\alpha X_1 \Rightarrow X_1 = 0$$

$$s X_2 = -\cancel{X_1} + 2X_2 + U$$

$$(s-2) X_2 = U \Rightarrow \boxed{G(s) = \frac{1}{s-2}}$$

NELLA F.D.T NON APPARE IL POLO NON RAGGIUNGIBILE

ESERCIZIO 2

$$\begin{cases} x(t+1) = A\,x(t) \\ y(t) = C\,x(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1) PROGETTARE UN OSSERVATORE DELLO STATO CHE ESAURISCA I TRANSITORI IN TEMPO FINITO

$\Rightarrow$ TUTTI GLI AUTOVALORI DI $A+LC$ DEVONO ESSERE IN ZERO

$\Rightarrow$ IL SISTEMA DEVE ESSERE COMPLETAMENTE OSSERVABILE PER POTERE ASSEGNARE GLI AUTOVALORI

$\Rightarrow$ L'OSSERVATORE SARÀ

$$\boxed{\hat{x}(t+1) = A\hat{x}(t) + L\left(C\hat{x}(t) - y(t)\right)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad CA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(O) = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{OSSERVABILE}$$

$\Rightarrow$ CALCOLO $A + LC$

$$A+LC = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & l_1 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1+l_1 \\ -1 & 1+l_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} tr(A+LC) = 0 \\ \det(A+LC) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+1+l_2 = 0 \\ 2(1+l_2) + 1 + l_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l_2 = -3 \\ 2(-2) + 1 + l_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow l_1 = 3 \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 3

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1) STUDIARE LA RAGGIUNGIBILITA' DEL SISTEMA

$$R = [\, B \quad AB \,]$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(R) = -1 \neq 0 \Rightarrow$$ SISTEMA RAGGIUNGIBILE

2) PROGETTARE UNA LEGGE DI CONTROLLO $u = Kx$ PER AVERE DEI TRANSITORI CHE ESAURISCONO IN UN TEMPO FINITO

$$\Rightarrow \begin{cases} tr(A+BK) = 0 \\ \det(A+BK) = 0 \end{cases}$$

$$A + BK = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+k_1 & -1+k_2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$tr(A+BK) = 5 + k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = -5$$

$$\det(A+BK) = 3(2+k_1) - 1 + k_2 = 0$$

$$= 3(-3) - 1 + k_2 = 0$$

$$\Rightarrow k_2 = 10$$

$$\boxed{k = [-5 \quad 10]}$$

ESERCIZIO 4

$$\dot{x} = Ax \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y = Cx \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1) DIRE SE È POSSIBILE RICOSTRUIRE ASINTOTICAMENTE LO STATO E CON QUALE TEMPO DI RISPOSTA

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} \qquad AC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(O) = 0$$

$\Rightarrow$ NON È COMPLETAMENTE OSSERVABILE

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y)$$

$\Rightarrow$ VERIFICO SE $A+LC$ PUÒ AVERE AUTOVALORI STABILI

$$A + LC = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

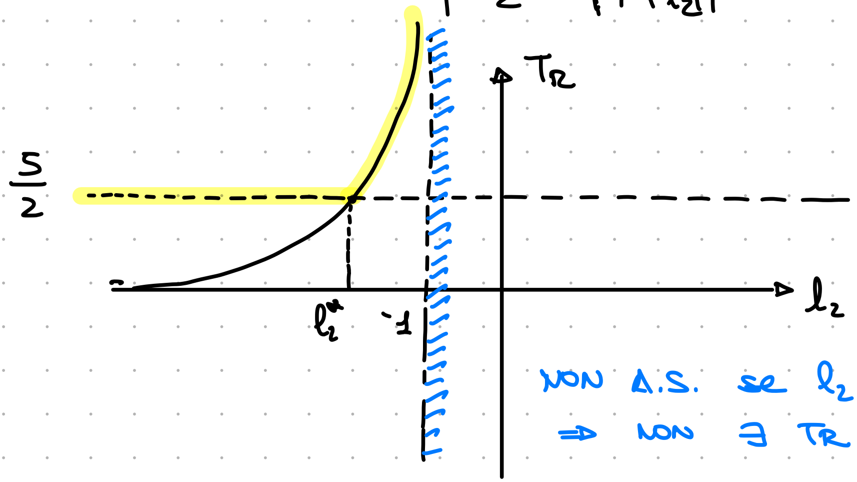
$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 + l_1 \\ 0 & 1 + l_2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(A + LC) = \left[\underbrace{-2}_{\text{A.S.}}, \; 1 + l_2 \right]$$

$$\hookrightarrow \boxed{l_2 < -1}$$

$$T_R = \frac{5}{|\lambda_0|} \Rightarrow \begin{cases} T_R = \dfrac{5}{2} \\ T_R = \dfrac{5}{|1 + l_2|} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_R = \max \left\{ \frac{5}{2}, \frac{5}{|1 + l_2|} \right\}$$



NON A.S. se $l_2 > -1$
$\Rightarrow$ NON $\exists$ T_R

l_2^* :
$$\frac{5}{|1+l_2^*|} = \frac{5}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$-1 - l_2^* = 2 \Rightarrow \boxed{l_2^* = -3}$$

ESERCIZIO 5

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [\,0 \quad 1\,]$$

1) STUDIARE LA STABILITÀ

$$\begin{cases} tr(A) < 0 & -3 < 0 \text{ ok} \\ \det(A) > 0 & -4 - 6 = -10 < 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\text{instabile}}$$

2) PROGETTARE UN REGOLATORE STABILIZZANTE DEL SISTEMA E FARE IN MODO CHE $T_R \simeq 5$

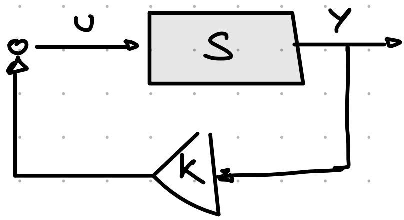
$\Rightarrow$ L'INFORMAZIONE DELLO STATO NON È TUTTA DISPONIBILE

$\Rightarrow$ <u>OPZIONE 1</u> : $u = Ky = Kx_2$

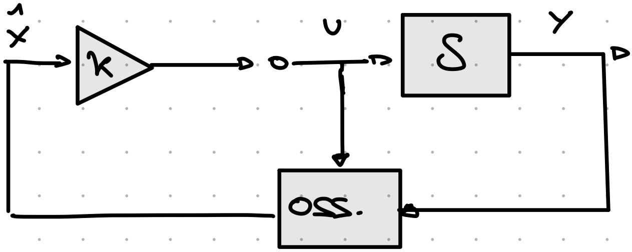
$\Rightarrow$ <u>OPZIONE 2</u> :

$$\begin{cases} u = K\hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y) \end{cases}$$

1)



2)



⇒ VERIFICO CHE $(A+BK)$ E $(A+LC)$ ABBIANO AUTOVALORI TUTTI A SX DI -1 PER SODDISFARE IL VINCOLO SUL TEMPO DI ASSESTAMENTO

$$A + BK = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3+k_1 & 1+k_2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ SCEGLIAMO DI SODDISFARE AL LIMITE LA RICHIESTA

$\Rightarrow$ AUTOVALORI REALI E COINCIDENTI IN -1

$$\begin{cases} tr(A+BK) = -2 = -4+1+K_2 \Rightarrow K_2 = 1 \\ det(A+BK) = 1 = -4(1+K_2)+2(-3+K_1) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad k_2 = 1$$

$$-8 - 6 + 2K_1 = 1 \Rightarrow K_1 = \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K = \begin{bmatrix} \frac{15}{2} & 1 \end{bmatrix}}$$

$$A + LC = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -2+l_1 \\ -3 & 1+l_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} tr(A+LC) = -2 = -4+1+l_2 \Rightarrow l_2 = 1 \\ det(A+LC) = 1 = -4(1+l_2)+3(2+l_1) = 1 \end{cases}$$

$$l_2 = 1$$

$$-8-6+3l_1 = 1 \Rightarrow 3l_1 = 1+8+6$$

$$\Rightarrow 3l_1 = 15$$

$$\Rightarrow l_1 = 5$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

OPZIONE 1)

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u = k y = k x_2$$

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + BkC y$$

$$\Rightarrow \tilde{A} = A + BkC =$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} k \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1+k \end{bmatrix}$$

$$p(\tilde{A}) = \lambda^2 + (3-k)\lambda + (-4-4k-6)$$

$$p(\tilde{A}) = \lambda^2 + (3-k)\lambda + (-10-4k)$$

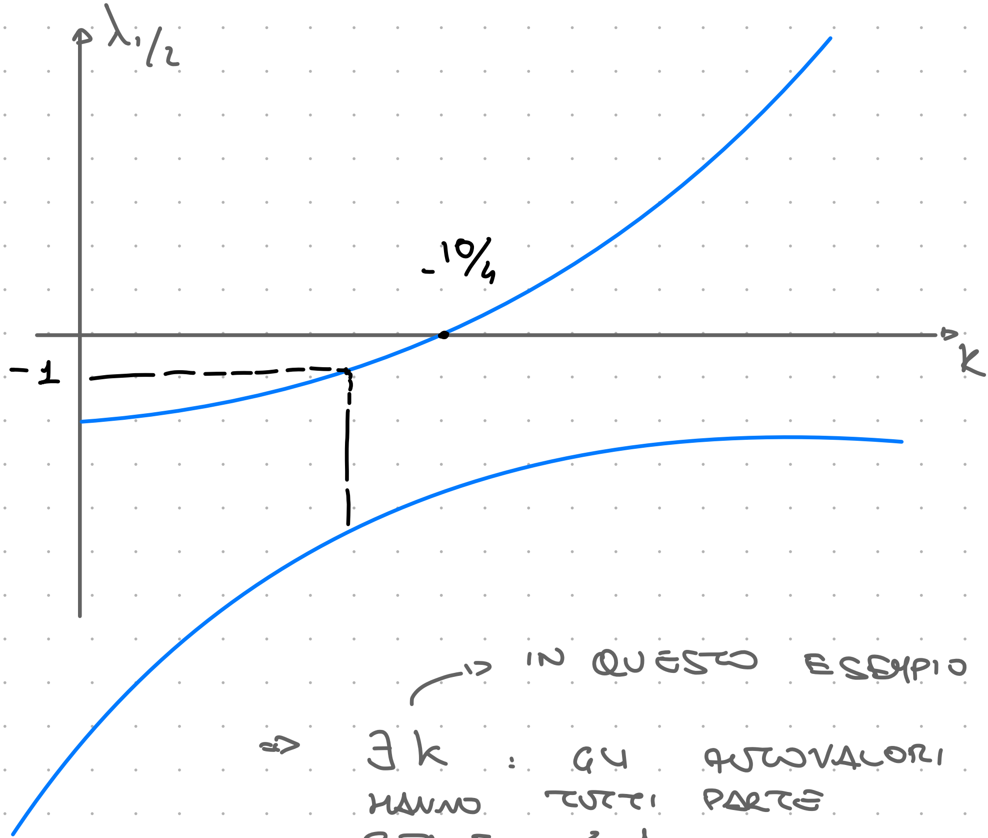
$$\begin{cases} 3-k>0 \Rightarrow k<3 \\ -10-4k>0 \Rightarrow k<-\frac{10}{4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{k < -\frac{10}{4}}$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{k-3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(3-k)^2+40+16k}$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{k-3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\underbrace{k^2+10k+49}_{>0\ \forall k}}$$

$$(100-4\cdot 49<0)$$

$\Rightarrow$ POLI REALI



$\Rightarrow$ IN QUESTO ESEMPIO

$\Rightarrow$ $\exists k$: GLI AUTOVALORI HANNO TUTTI PARTE REALE < 1

MA NON POSSONO ESSERE ASSEGNATI ARBITRARIAMENTE