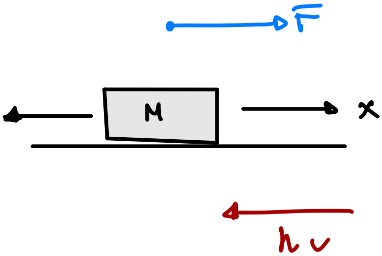
2 MAGGIO 2024
ESERCITAZIONE 8
STEFANO RADRIZZANI

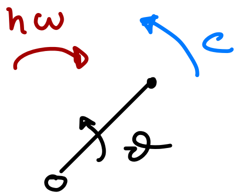
ARGOMENTI:

→ SISTEMA DI CONTROLLO

→ RISPOSTE CANONICHE

ESERCIZIO 1 : CONTROLLO DI POSIZIONE DI UN OGGETTO (SUL PIANO)





$$M a = F - h v \qquad\qquad J \alpha = C - h \omega$$

$$\dot{x} = v \qquad\qquad \dot{\theta} = \omega$$

$$\dot{v} = a \qquad\qquad \dot{\omega} = \alpha$$

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \frac{1}{M}(F - h v) \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = \frac{1}{J}(C - h \omega) \end{cases}$$

IN ENTRAMBI I CASI ABBIAMO UNA RAPPRESENTAZIONE IN SPAZIO DI STATO EQUIVALENTE

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -h/J\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1/J\end{bmatrix}u$$

$$x_1 = \vartheta$$
$$x_2 = \omega$$

$$u = C$$

$\Rightarrow$ ANALISI DEL SISTEMA

- $\lambda(A) = \{0, -h/J\}$

  $\Rightarrow$ SISTEMA SEMPLICEMENTE STABILE

- $$\begin{cases} 0 = \bar{x}_2 \\ 0 = \dfrac{1}{J}\left(\bar{u} - \cancelto{=0}{h\bar{x}_2}\right)\end{cases}$$

$\Rightarrow$ SE $\bar{u} \neq 0$ ALLORA NON CI SONO EQUILIBRI

$\Rightarrow$ SE $\bar{u} = 0$ ALLORA CI SONO INFINITI EQUILIBRI

POSSO AVERE QUALSIASI POSIZIONE DI EQUILIBRIO $\leftarrow \begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ 0\end{bmatrix}$

OBIETTIVO : RENDERE IL SISTEMA ASINTOTICAMENTE STABILE ATTORNO A UNA GENERICA POSIZIONE DI EQUILIBRIO $\bar{x}_1$

$\boxed{1}$ $u = Ky + v$ $\underbrace{y = x_1}$

MISURO SOLO LA POSIZIONE

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{J}(u - h x_2) \end{cases} \quad \rightarrow \; u = k x_1 + v$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{J}(k x_1 + v - h x_2) \end{cases}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k}{J} & -\frac{h}{J} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(\tilde{A}) = -\frac{h}{J} \qquad \det(\tilde{A}) = -\frac{k}{J}$$

1) CONDIZIONE DI STABILITA'

$tr(\tilde{A}) < 0$ ✓

$det(\tilde{A}) > 0 \Rightarrow \boxed{K < 0}$

<u>OSS</u> : $tr(\tilde{A}) = -\frac{h}{J}$ <u>NON</u> DIPENDE DA K

$\Rightarrow$ LA SOMMA DEGLI AUTOVALORI DI $\tilde{A}$ È SEMPRE $-h/J$

$\Rightarrow$ NON POSSO POSIZIONARE GLI AUTOVALORI A PIACIMENTO

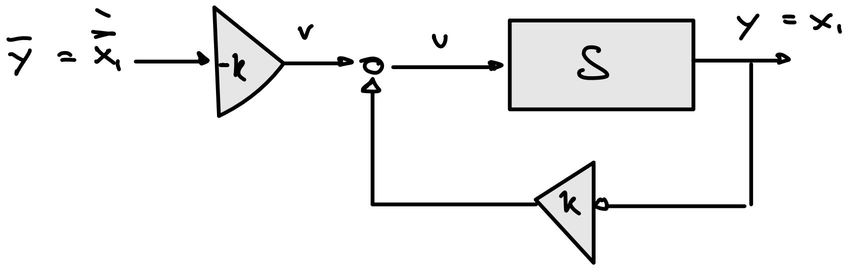
2) STUDIO GLI EQUILIBRI DEL SISTEMA

$$0 = \bar{x}_2$$

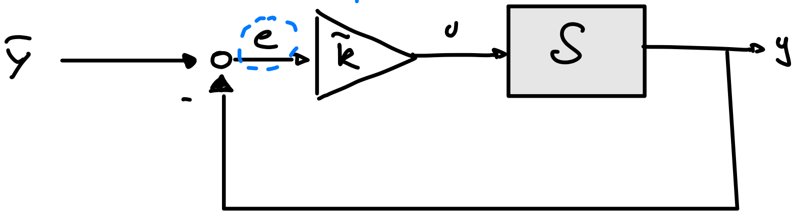
$$0 = \frac{1}{J}\left(K\bar{x}_1 + v - \overbrace{h\bar{x}_2}^{=0}\right)$$

$\Rightarrow$ SCELGO $v = -K\bar{x}_1$

⇒ RAPPRESENTAZIONE GRAFICA



$\tilde{k} = -k > 0$



⇒ LA LEGGE DI CONTROLLO RISULTANTE È UNA LEGGE DI CONTROLLO PROPORZIONALE ALL'ERRORE TRA RIFERIMENTO ($\bar{y}$) POSIZIONE (y)

3) ANALISI PRESTAZIONI SISTEMA DI CONTROLLO

⇒ CALCOLO IL TEMPO DI ASSESESTAMENTO

⇒ CALCOLO AUTOVALORI DI $\tilde{A}$

$$p(\tilde{A}) = \lambda^2 + \frac{h}{J}\lambda - \frac{\overset{\tilde{k}}{k}}{J} = 0$$

$$p(\tilde{A}) = \lambda^2 + \frac{h}{J}\lambda + \frac{\tilde{k}}{J} = 0$$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{h}{2J} \pm \frac{1}{2J}\sqrt{\underbrace{h^2 - 4\tilde{k}J}}$$

- AUTOVALORI COMPLESSI QUANDO $h^2 - 4\tilde{k}J < 0$

$$\Rightarrow \tilde{k} > \frac{h^2}{4J}$$

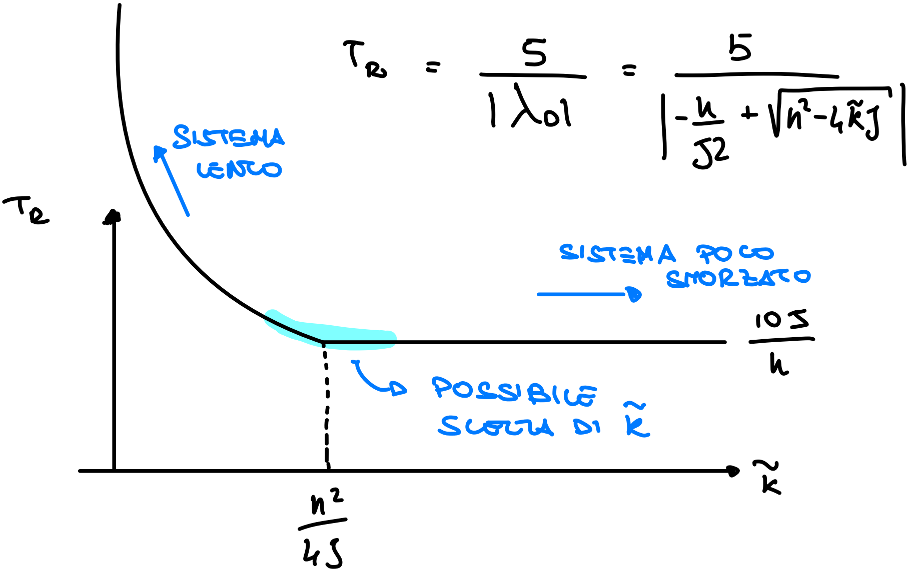
⇒ TEMPO DI ASSESTAMENTO

$$T_{R} = \frac{5}{\left|-\frac{h}{2J}\right|} = \frac{10J}{h}$$

- AUTOVALORI REALI QUANDO

$$0 < \tilde{k} < \frac{h^2}{4J}$$

⇒ TEMPO DI ASSESTAMENTO



$\boxed{2}$ ANALIZZARE SE CON UNA LEGGE DI CONTROLLO PROPORZIONALE ALLA STIMA DELLO STATO RIESCO AD AVERE UN SISTEMA PIÙ VELOCE

$$u = K\hat{x} + v \qquad C = [1 \quad 0]$$

MISURO SOLO IL PRIMO STATO

$$\dot{\hat{x}} = (A + LC)\hat{x} - LCy$$

$\Rightarrow$ SE IL SISTEMA È COMPLETAMENTE OSSERVABILE E RAGGIUNGIBILE ALLORA POSSO ASSEGNARE ARBITRARIAMENTE AUTOVALORI ANCHE PIÙ VELOCI

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{J} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} \qquad O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1/J \\ -h/J^2 \end{bmatrix} \qquad CA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1/J \\ 1/J & -h/J^2 \end{bmatrix} \qquad O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(R) = -1/J^2 \neq 0 \qquad \det(O) = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ POSSO EFFETTIVAMENTE VELOCIZZARE IL SISTEMA

ES: $T_R = \dfrac{5J}{h} \Rightarrow \lambda_D = -\dfrac{h}{J}$

$\Downarrow$

COINCIDENTI IN λ_D

$$(A+BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -h/J \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1/J & \dfrac{k_2-h}{J} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tr}(A+BK) = -\frac{2h}{J} = \frac{k_2}{J} - \frac{h}{J}$$

$$\Rightarrow \det(A+BK) = -\frac{k_1}{J} = \frac{h^2}{J^2}$$

$$\begin{cases} k_2 = -h \\ k_1 = -\dfrac{h^2}{J} \end{cases}$$

$$(A + LC) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -h/J \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} l_1 & 1 \\ l_2 & -h/J \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad tr(A+LC) = -2h/J = l_1 - h/J$$

$$\Rightarrow \quad det(A+LC) = h^2/J^2 = -l_1 h/J - l_2$$

$$\begin{cases} l_1 = -h/J \\ l_2 = -2h^2/J^2 \end{cases}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad u = K\hat{x} + v$$

$$0 = A\bar{x} + BK\bar{\hat{x}} + Bv$$

SICCOME L'OSSERVATORE È A.S.

$$\bar{\hat{x}} = \bar{x}$$

$$0 = (A + BK)\bar{x} + Bv$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \bar{x}_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{J}\left(K_1\bar{x}_1 + \cancel{K_2\bar{x}_2} + v - \cancel{h\bar{x}_2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v = -K_1\bar{x}_1}$$

$$u = K_1\hat{x}_1 + K_2\hat{x}_2 - K_1\bar{x}_1 =$$

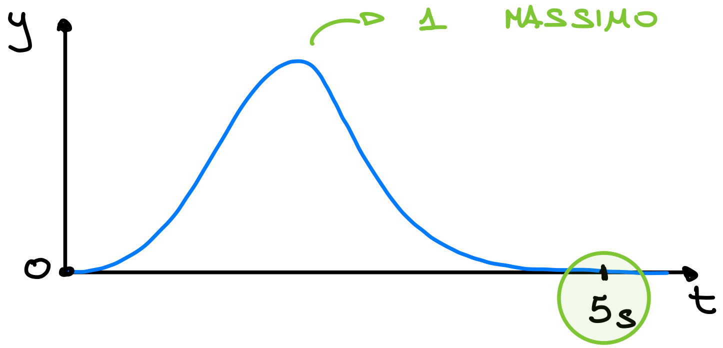
$$= K_1(\hat{x}_1 - \bar{x}_1) + K_2\hat{x}_2$$

PROPORZIONALE ALL'ERRORE

PROPORZIONALE ALLA VELOCITÀ

ESERCIZIO 2

PROPORRE UNA F.D.T. SEMPLICE CHE ABBIA COME RISPOSTA ALLO SCALINO QUELLA IN FIGURA



$\Rightarrow$ LA RISPOSTA TENDE A 0 $\Rightarrow$ $G(0) = 0$

$\Downarrow$

I POLI DEVONO ESSERE STABILI TUTTI

$\Rightarrow$ LA RISPOSTA NON PRESENTA OSCILLAZIONI $\Rightarrow$ POLI REALI

$\Rightarrow$ LA RISPOSTA PARTE CON CONDIZIONI INIZIALI NULLE E CON DERIVATA INIZIALE NULLA

$\Rightarrow$ GRADO RELATIVO ≥ 2

T. V. F.

RISPOSTA ALLO SCALINO

$$\lim_{s \to 0} s\,Y(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s}\, G(s) \frac{1}{\cancel{s}} = y(\infty)$$

SE F.D.T A.S.

$\Rightarrow \quad y(\infty) = 0 \quad \Rightarrow \quad G(0) = 0$

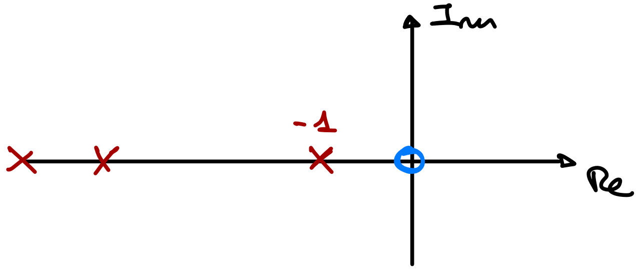
$\Downarrow$

AVREMO ALMENO UNO ZERO NELL' ORIGINE

$$G(s) = \frac{s}{(s+k_1)(s+k_2)(s+k_3)} \qquad k_i > 0$$

$\Rightarrow$ AUTOVALORE \ POLO DOMINANTE IN -1

$\Rightarrow \quad k_1 = 1 \quad , \quad k_2, k_3 > 1$



$$m < N_{ESTREMI} < m + \delta$$

m : NUMERO DI ZERI PIÙ A DX DEL POLO DOMINANTE

δ : NUMERO DI ZERI MAL INQUADRATI

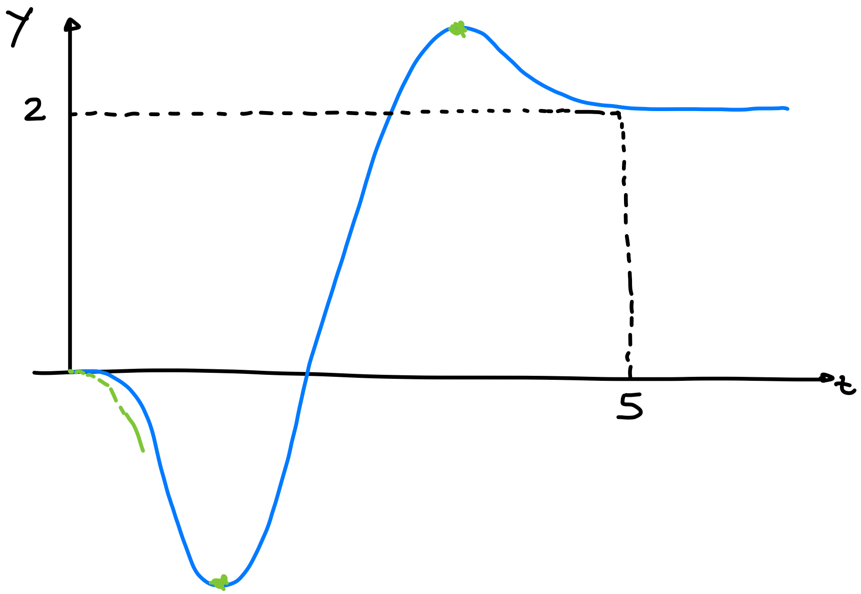
$\Rightarrow$ NELLA SITUAZIONE ATTUALE

$$1 \leq 1 \leq 1$$

$\Rightarrow$ IL NUMERO DI ZERI È COMPATIBILE CON IL COMPORTAMENTO DELLA RISPOSTA

$$\Rightarrow \boxed{G(s) = \frac{s}{(s+1)(s+k_2)(s+k_3)} \qquad k_2, k_3 > 1}$$

ESERCIZIO 3



→ TENDE A 2 SENZA OSCILLAZIONI

↓ POLI A.S. ↓ $G(0) = 2$ ↓ POLI REALI

IN 5 s

↳ POLO DOMINANTE 1

→ PARTE DA ZERO CON DERIVATA INIZIALE NULLA

↳ GRADO RELATIVO ≥ 2

→ PRESENTA DUE ESTREMI

$$N_E \leq m + \delta$$

⇒ NEL CONTESTO DI F.D.T. PIÙ SEMPLICE

$$m = 2 \quad \text{OPPURE} \quad \delta = 2$$

⇒ IDEALMENTE CI SERVONO ALMENO 2 ZERI

$$\boxed{G(s) = \frac{2}{(s+1)} \frac{(T_{z1} s + 1)(T_{z2} s + 1)}{(T_{p1} s + 1)(T_{p2} s + 1)(T_{p3} s + 1)}}$$

$$\boxed{T_{p1}, T_{p2}, T_{p3} < 1}$$

LA RISPOSTA ALLO SCALINO PARTE CON DERIVATA SECONDA NEGATIVA

CONDIZIONI INIZIALE E DERIVATA INIZIALE NULLA

SCALINO

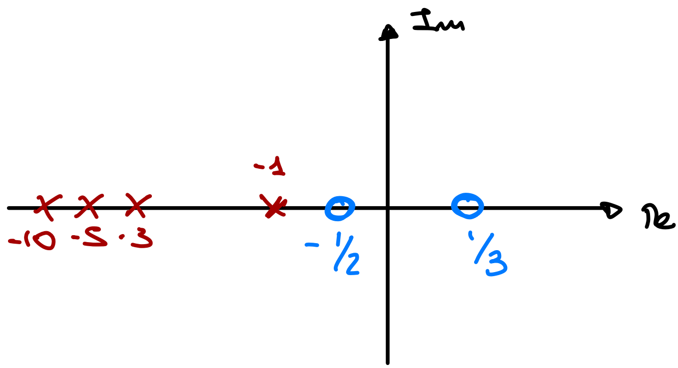
T.V.I. $\quad \ddot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} \cancel{s}\left[s^2 G(s)\right]\frac{1}{\cancel{s}}$

$$= \lim_{s\to\infty} s^2 G(s) =$$

$$= \frac{2\, T_{z1} T_{z2}}{\underbrace{T_{p1} T_{p2} T_{p3}}_{>0}} < 0$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{z1} \cdot T_{z2} < 0}$$

↳ uno è positivo e l'altro è negativo



scegliendo dei numeri:

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)} \; \frac{(2s+1)(-3s+1)}{(0.1s+1)(0.2s+1)(0.3s+1)}$$

$$G(s) = \frac{(s+k_1)(s+k_2)}{(s+k_3)^3} \cdot \alpha$$

$$\hookrightarrow \quad G(0) = \frac{k_1 k_2}{k_3^{\,3}} \cdot \alpha$$

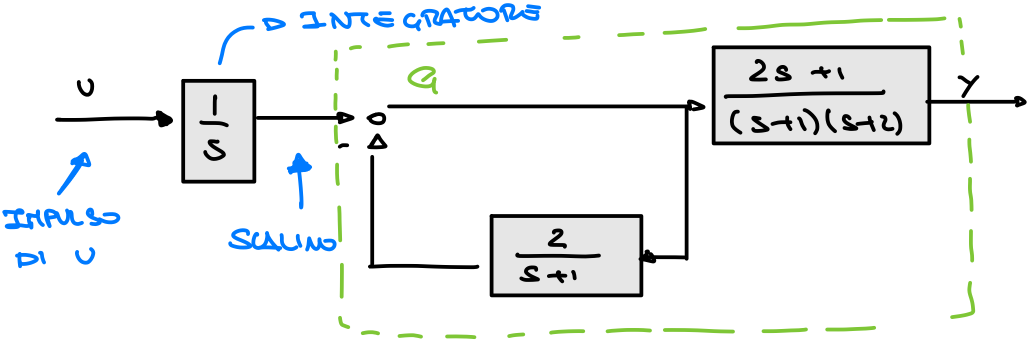
$$G(s) = \alpha \frac{k_1 k_2}{k_3^{\,3}} \frac{(s/k_1 + 1)(s/k_2 + 1)}{(s/k_3 + 1)^3}$$

$$= \tilde{\alpha} \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{(T_3 s + 1)^3}$$

$$G(0) = \tilde{\alpha}$$

NOTAZIONE PIÙ COMODA PER FISSARE IL GUADAGNO

ESERCIZIO 4



1) RICAVARE LA RISPOSTA ALL' IMPULSO ANALITICA E QUALITATIVA

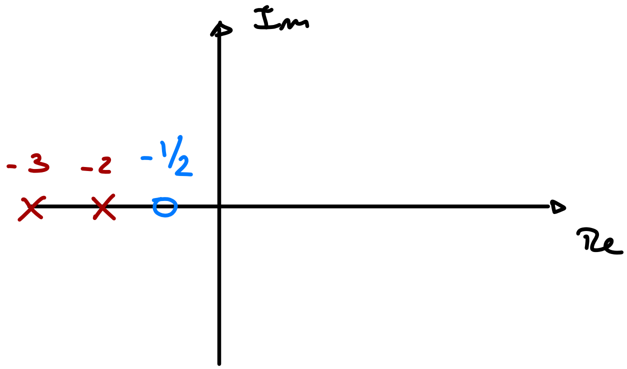
↳ EQUIVALE A CALCOLARE LA RISPOSTA ALLO SCALINO DI G

$$G(s) = \frac{1}{1+\frac{2}{s+1}} \cdot \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} =$$

$$= \frac{\cancel{(s+1)}(2s+1)}{(s+3)\cancel{(s+1)}(s+2)} =$$

$$= \frac{2s+1}{(s+3)(s+2)}$$

• RISPOSTA QUALITATIVA



• POLI A.S. ⇒ CONVERGE A UN VALORE FINITO

↓

$G(0) = \frac{1}{6}$

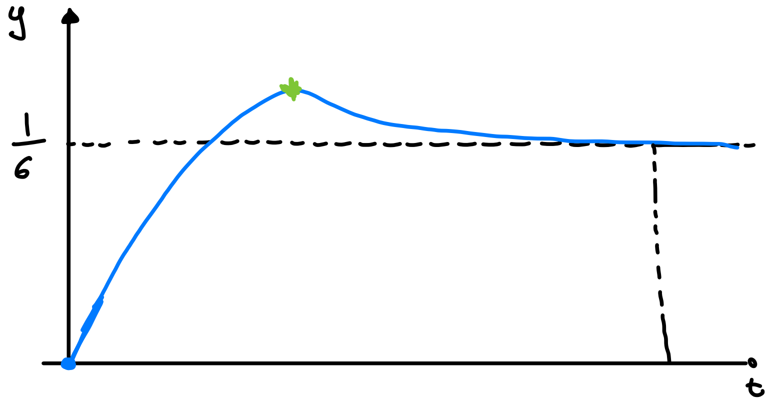
• $r = 1$ ⇒ CONDIZIONE INIZIALE NULLA

MA DERIVATA $\neq 0$ IN $t=0$

$$\lim_{s \to \infty} s\,G(s) = 2 > 0$$

• POLI REALI ⇒ NO OSCILLAZIONI

• CI ASPETTIAMO UN ESTREMO



$$T_A = \frac{5}{2}$$

POCO DOMINANTE

RISPOSTA ANALITICA

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{(2s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

?

METODO DI HEAVISIDE

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{(s+3)}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$y(t) = A + Be^{-2t} + Ce^{-3t} \qquad t \geq 0$$

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{(s+3)} = \frac{2s+1}{s(s+2)(s+3)}$$

- $A(s+2)(s+3) + Bs(s+3) + Cs(s+2) = 2s+1$

1) DEVONO AVERE I COEFFICIENTI UGUALI

2) PASSANO PER $n+1$ PUNTI UGUALI

$\rightarrow s = 0$

$A\,6 = 1 \Rightarrow A = 1/6$

$\rightarrow s = -2$

$B(-2) = -4+1 \Rightarrow B = 3/2$

$\rightarrow s = -3$

$C(-3)(-1) = -5 \Rightarrow C = -5/3$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{6} + \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-3t}}$$

$$y(0) = \frac{1}{6} + \frac{3}{2} - \frac{5}{3} = \frac{1 + 9 - 10}{6} = 0$$

ok

$$y(\infty) = \frac{1}{6}$$

ok

$\Rightarrow$ POTREMMO CONTINUARE VERIFICANDO CHE $\dot{y}(0) = 0$

...