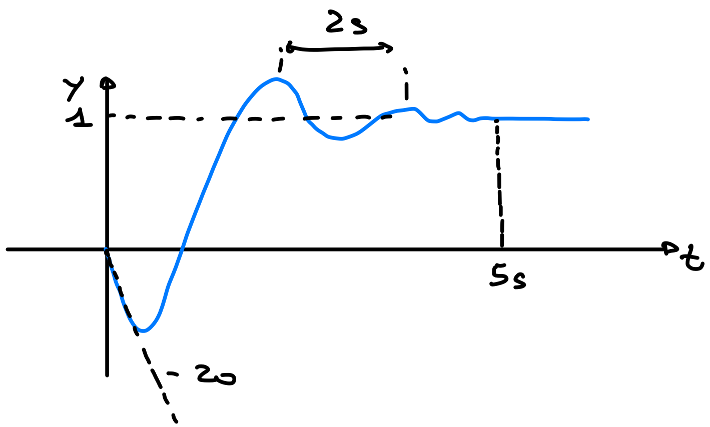
9 MAGGIO 2024
ESERCITAZIONE 9
STEFANO RADRIZZANI

ARGOMENTI : $\longrightarrow$ RISPOSTE INGRESSI CANONICI

ESERCIZIO 1

PROPORRE UNA F.D.T. IN GRADO DI AVERE UNA RISPOSTA ALLO SCALINO COME IN FIGURA



- TENDE A 1

  → POLI CON PARTE REALE NEGATIVA

  → IL GUADAGNO $G(0) = 1$

- PRESENZA OSCILLAZIONI

  → POLI COMPLESSI

- TEMPO DI ASSESTAMENTO È DI 5 s

$$T_R = \frac{5}{|Re\,\lambda_D|}$$

↳ AUTOVALORE DOMINANTE

$$|Re\,\lambda_D| = 1$$

- OSCILLAZIONI CON PERIODO 2

$$T = \frac{2\pi}{I_m \lambda_D} = 2$$

$$\Rightarrow I_m \lambda_D = \pi$$

- DERIVATA INIZIALE $\neq 0$

$\Rightarrow$ GRADO RELATIVO 1

È NECESSARIO INTRODURRE UNO ZERO

$$\Rightarrow \dot{y}(0) = \lim_{s \to \infty} s\,G(s) = 20$$

T.V.I SULLA DERIVATA

$$\boxed{G(s) = \mu \frac{(s\alpha + 1)}{s^2 + bs + c}}$$

$\lambda_{1/2}$: POLI DELLA F.D.T.

$$\lambda_{1/2} = -1 \pm \pi i$$

$\Rightarrow$ DENOMINATORE DI $G(s)$

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) =$$

$$= (s + 1 - \pi i)(s + 1 + \pi i) =$$

$$= s^2 + 2s + (1 + \pi^2)$$

$$\simeq s^2 + 2s + 10$$

$$G(s) = \mu \frac{(s\alpha + 1)}{s^2 + 2s + 10}$$

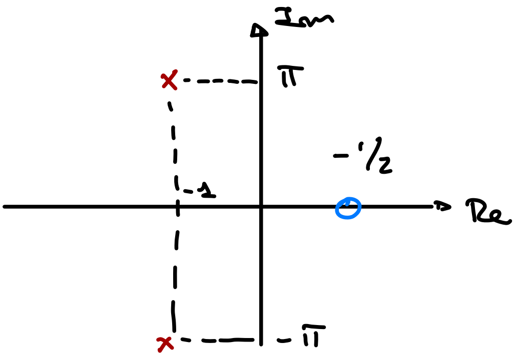
$$G(0) = \mu/10 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mu = 10$$

$$\lim_{s \to \infty} s\, G(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{10(s^2 \alpha + s)}{s^2 + 2s + 10} = -20$$

$$\Rightarrow \quad 10\,\alpha = -20$$

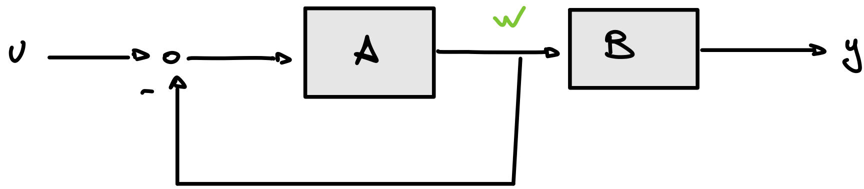
$$\Rightarrow \quad \alpha = -2$$

$$\boxed{G(s) = \frac{10(1 - 2s)}{(s^2 + 2s + 10)}}$$



ESERCIZIO 2

$y(t) = w(t-5)$



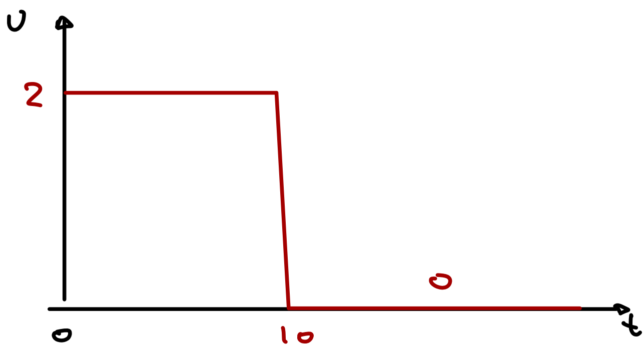
$$A(s) = \frac{10}{(1+s)^2} \qquad B(s) = e^{-5s}$$

↳ RAPPRESENTA UN RITARDO DI 5s

1) DETERMINARE LA F.D.T. COMPLESSIVA DA U A Y

2) DISCUTERE STABILITÀ ESTERNA DEL SISTEMA

3) DETERMINARE LA RISPOSTA QUALITATIVA DI $y(t)$ QUANDO $u(t)$ E' QUELLO IN FIGURA



1) DEFINENDO $G(s)$ LA F.D.T. COMPLESSIVA

$$G(s) = \underbrace{\underbrace{\frac{A(s)}{1 + A(s)}}_{\text{RETROAZIONE NEGATIVA}} B(s)}_{\text{SERIE}}$$

$$G(s) = \frac{\dfrac{10}{(s+1)^2}}{1 + \dfrac{10}{(s+1)^2}} e^{-5s}$$

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)^2 + 10} e^{-5s}$$

$$\boxed{G(s) = \underbrace{\frac{10}{s^2 + 2s + 11}}_{\tilde{G}(s)\,:\ \text{F.D.T. DA } u \text{ A } w} e^{-5s}}$$

2)

SICCOME y E' w IN RITARDO DI S S

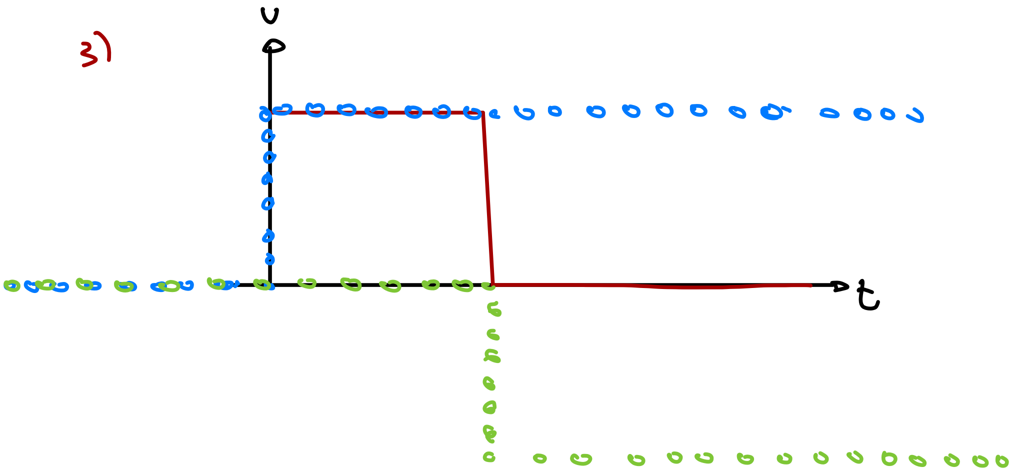
POSSO STUDIARE LA STABILITA' DELLA F.D.T. DA u A w

$$\tilde{G}(s) = \frac{10}{\underbrace{s^2+2s+11}}$$

COEFFICIENTI CONCORDI E NON NULLI

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{ASINTOTICAMENTE STABILE}}$

3)



$$u(t) = 2\,sca(t) - 2\,sca(t-10)$$

$$= u_1 + u_2$$

IL SISTEMA DA U A W E'
LINEARE E TEMPO INVARIANTE

$\Rightarrow$ VALE LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

$$w(t) = \underbrace{w_1(t)}_{\text{RISPOSTA A } u_1} + \underbrace{w_2(t)}_{\text{RISPOSTA A } u_2}$$

SE DEFINIAMO CON $\tilde{w}$
LA RISPOSTA ALLO SCALINO
DI W DATO U

E' SUFFICIENTE X TROVARE Y

$$\begin{cases} w(t) = 2\tilde{w}(t) - 2\tilde{w}(t-10) \\ y(t) = w(t-5) \end{cases}$$

⇒ TRACCIO RISPOSTA ALLO SCALINO DI $\tilde{G}(s)$

$$\tilde{G}(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 11}$$

→ DUE POLI A.S.

$$\lambda_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 44}}{2}$$

$$\lambda_{1/2} = -1 \pm i\sqrt{10}$$

⇒ OSCILLAZIONI NELLA RISPOSTA

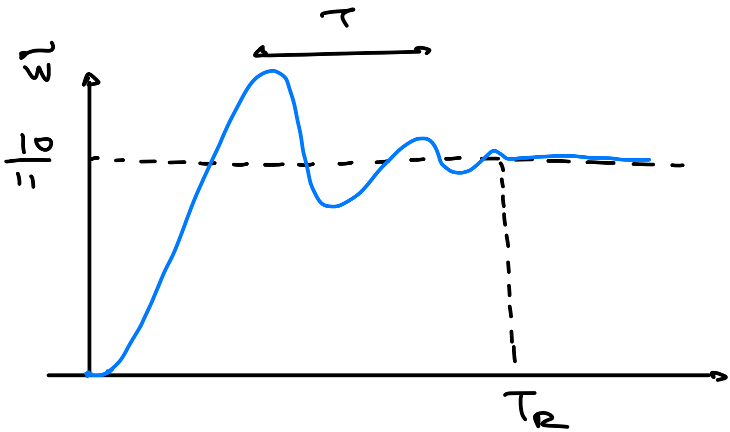
$$T_a = \frac{5}{|-1|} = 5\,s$$

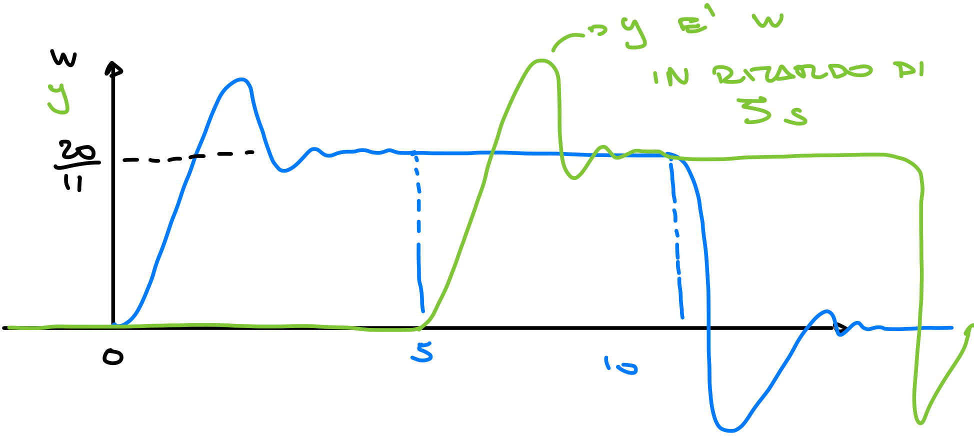
$$T = \frac{2\pi}{Im} = \frac{2\pi}{\sqrt{10}} \simeq 1$$

→ GRADO RELATIVO 2

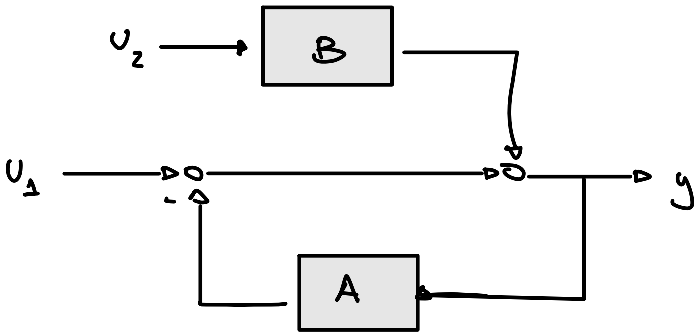
• CONDIZIONI INIZIALE E DERIVATA INIZIALE NULLA

$$\to \quad \tilde{w}(\infty) = \lim_{s \to 0} \tilde{G}(s) = \frac{10}{11}$$





ESERCIZIO 3



$$B = \frac{100\,(s+1)}{s^2+10s+100}$$

A : INTEGRATORE

$\Downarrow$

$$A(s) = \frac{1}{s}$$

1) DETERMINARE LA RISPOSTA QUALITATIVA DI y

$u_1 = sca(t)$ SCALINO AL TEMPO 0

$u_2 = sca(t-5)$ SCALINO A 5 s

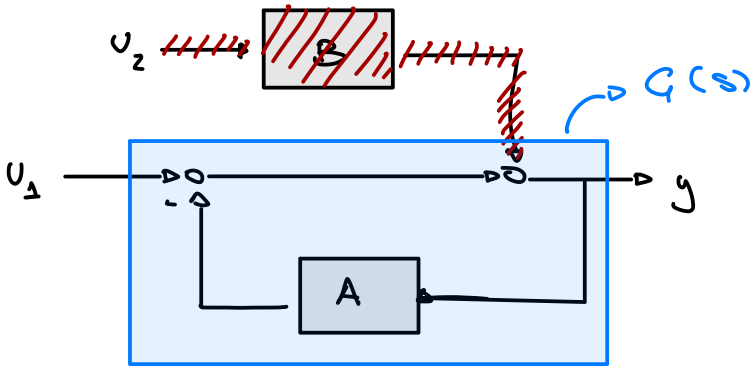
SICCOME VALE LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

y_1 : RISPOSTA QUANDO $u_2 = 0$

y_2 : RISPOSTA QUANDO $u_1 = 0$

$\Rightarrow$ STUDIO IL SISTEMA PER $u_2 = 0$



$$G(s) = \frac{1}{1 + A}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{s}} = \frac{s}{s+1}$$

$\Rightarrow$ RICAVO y_1 STUDIANDO LA RISPOSTA ALLO SCALINO DI $G(s)$

- 1 POLO REALE A.S.

  $\Rightarrow T_R = 5$

- ZERO NELL'ORIGINE

$G(0) = 0 \Rightarrow y_1(0) = 0$

- GRADO RELATIVO NON NULLO

$\Rightarrow$ CONDIZIONE INIZIALE NON NULLA

$$y_1(0) = \lim_{s\to\infty} G(s) = 1$$

VOLENDO POSSO CALCOLARE LA DERIVATA INIZIALE

$$\dot{y}_1(0) = \lim_{s\to\infty} s\left[sY(s) - y_1(0)\right]$$

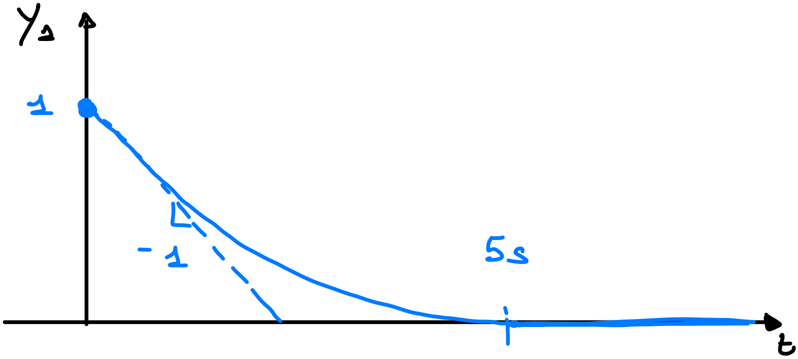
SE LE CONDIZIONI INIZIALI NON SONO NULLE APPAIONO NELLE DERIVATE!

$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s\left[\cancel{s}G(s)\frac{1}{\cancel{s}} - 1\right]$$

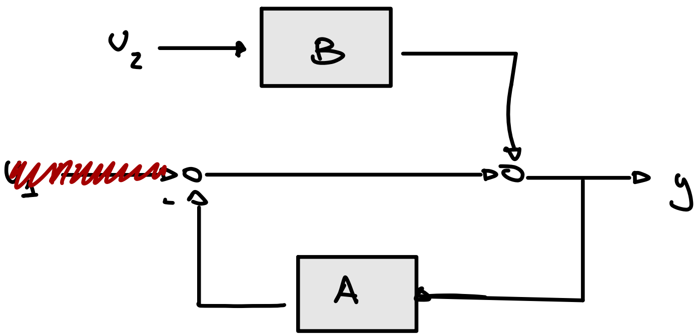
$$= \lim_{s\to\infty} s\left[\frac{s}{s+1} - 1\right]$$

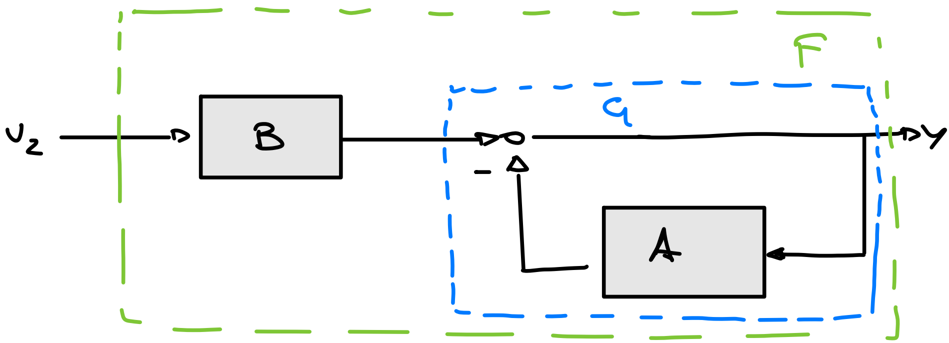
$$= \lim_{s \to \infty} s \, \frac{\cancel{s} - \cancel{s} - 1}{s+1} =$$

$$= \lim_{s \to \infty} \frac{-s}{s+1} = -1$$



$\Rightarrow$ STUDIO IL SISTEMA PER $u_1 = 0$





$$F(s) = B(s)\,G(s) = \frac{100\,\cancel{(s+1)}}{s^2+10s+100}\cdot\frac{s}{\cancel{s+1}} = \frac{100\,s}{s^2+10s+100}$$

$\Rightarrow$ CALCOLO RISPOSTA ALLO SCALINO DI F

- DUE POLI

$$\lambda_{1/2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100-400}}{2}$$

ASINTOTICAMENTE STABILE

POLI COMPLESSI

⇒ PRESENTERÀ DELLE OSCILLAZIONI

⇒ TEMPO DI ASSESTAMENTO

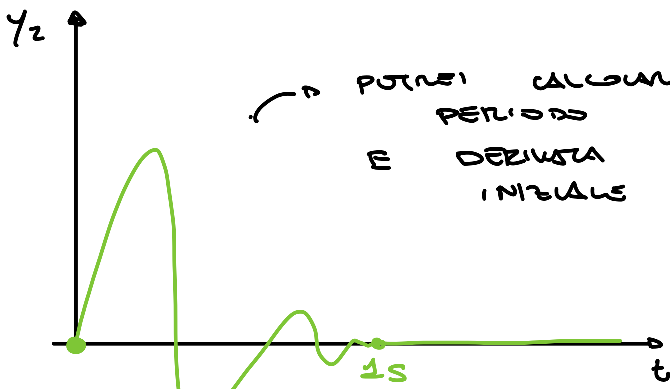
$$T_e = \frac{5}{|Re|} = 1$$

- ZERO NELL' ORIGINE

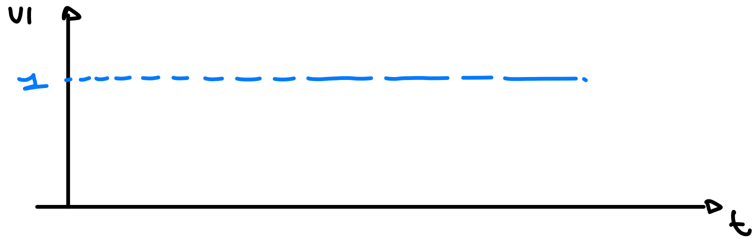
  ⇒ TENDE A ZERO

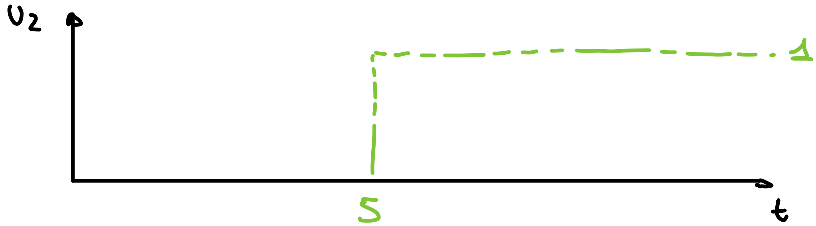
- GRADO RELATIVO 1

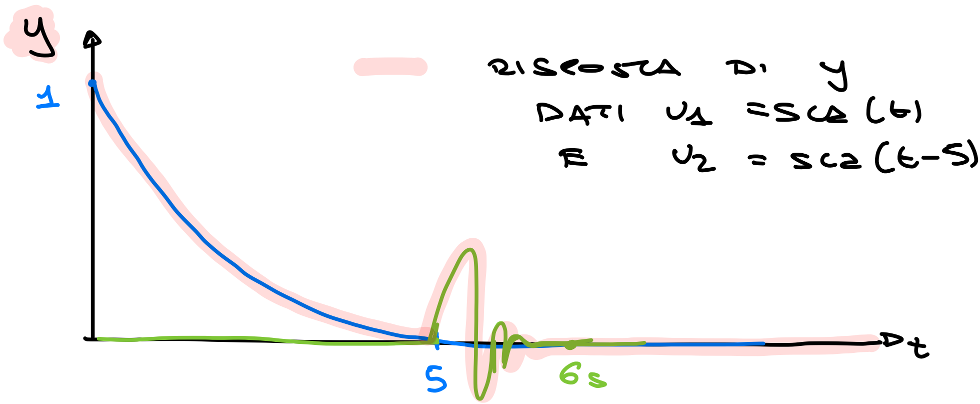
  ⇒ CONDIZIONI INIZIALI NULLE



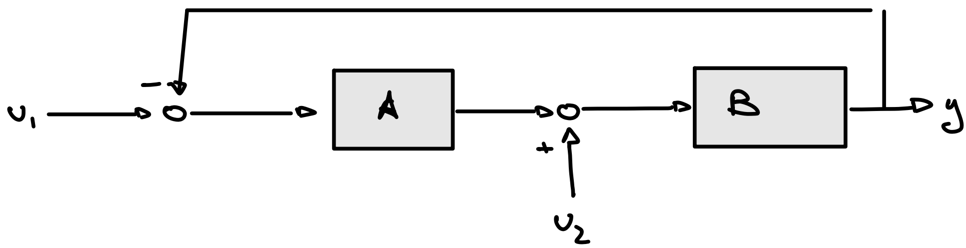
⇒ POTREI CALCOLARE PERIODO E DERIVATA INIZIALE


u1
1
t


u2
1
5
t


y
1
RISPOSTA DI y
DATI u1 = sca(t)
E u2 = sca(t-5)
5
6s
t

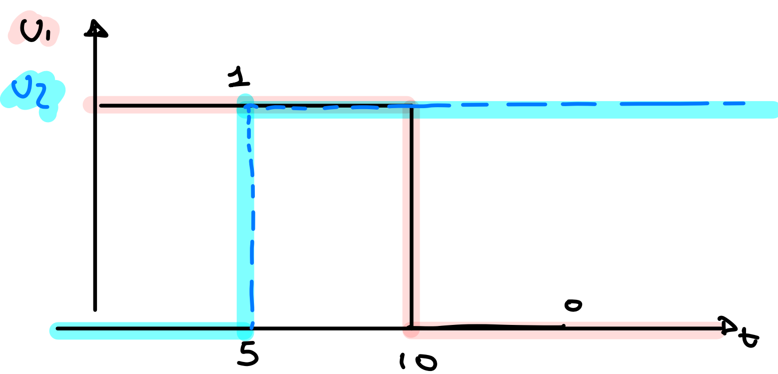
ESERCIZIO 4



A: INTEGRATORE $\qquad B = \dfrac{10}{s+2}$

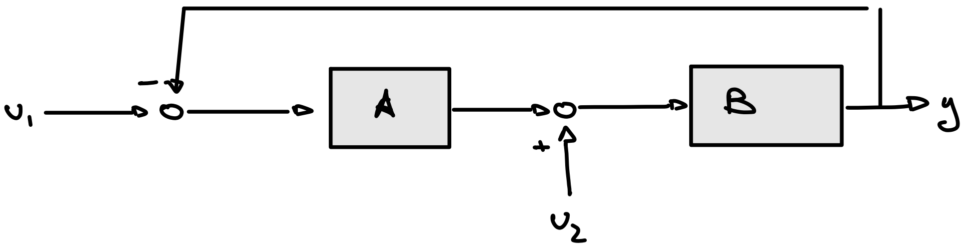
1) STUDIARE LA STABILITÀ DEL SISTEMA

2) DETERMINARE LA RISPOSTA DEL SISTEMA QUANDO u_1 E u_2 SONO QUELLI IN FIGURA



$$\begin{cases} u_1(t) = sca(t) - sca(t-10) \\ u_2(t) = sca(t-5) \end{cases}$$

1)



1. CALCOLO G_1 DA u_1 A y

$$G_1(s) = \frac{AB}{1 + AB}$$

$$A(s) = \frac{1}{s} \qquad B = \frac{10}{s+2}$$

$$G_1(s) = \frac{\frac{1}{s}\,\frac{10}{s+2}}{1 + \frac{1}{s}\,\frac{10}{s+2}} = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$$

$\Downarrow$

I COEFFICIENTI DEL DENOMINATORE SONO CONCORDI E NON NULLI

$\Rightarrow$ ASINTOTICAMENTE STABILE

DA u_1 A y

2. CALCOLO $G_2(s)$ DA u_2 A y

$$G_2 = \frac{B}{1 + AB} = \frac{\frac{10}{s+2}}{1 + \frac{1}{s}\frac{10}{s+2}} = \frac{10\,s}{\boxed{s^2 + 2s + 10}}$$

$\downarrow$

STESSI POLI DI G_1

$\Rightarrow$ G_2 E' A.S.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{IL SISTEMA È A.S.}}$

2) CALCOLO RISPOSTA ALLO SCALINO DI G_1 E G_2

$\boxed{G_1}$

$$\frac{10}{s^2+2s+10}$$

$\boxed{G_2}$

$$\frac{10s}{s^2+2s+10}$$

ENTRAMBE HANNO POLI A.S.

$$\lambda_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-40}}{2} =$$

$$= -1 \pm \frac{1}{2} i \sqrt{36}$$

OSCILLAZIONI

TEMPO DI RISPOSTA

$$T_R = 5s$$

VALORE FINALE

$G_1(0) = 1$

$G_2(0) = 0$

ZERO NELL' ORIGINE

GRADO RELATIVO

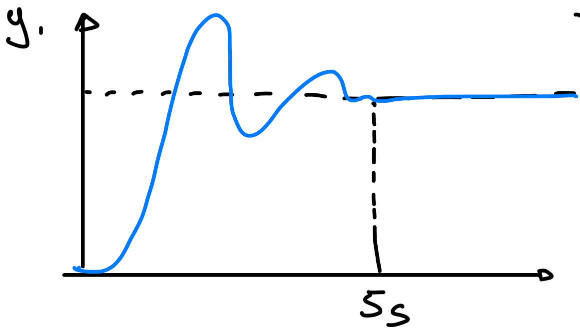
$r = 2$

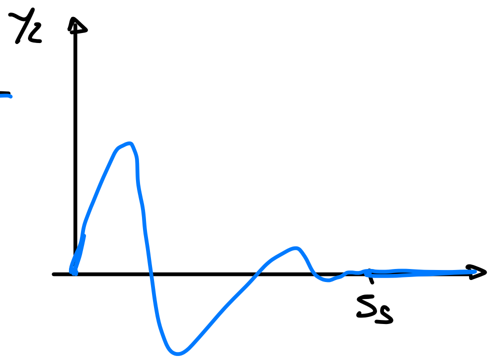
$r = 1$

CONDIZIONI INIZIALI NULLE | CONDIZIONI INIZIALI NULLE

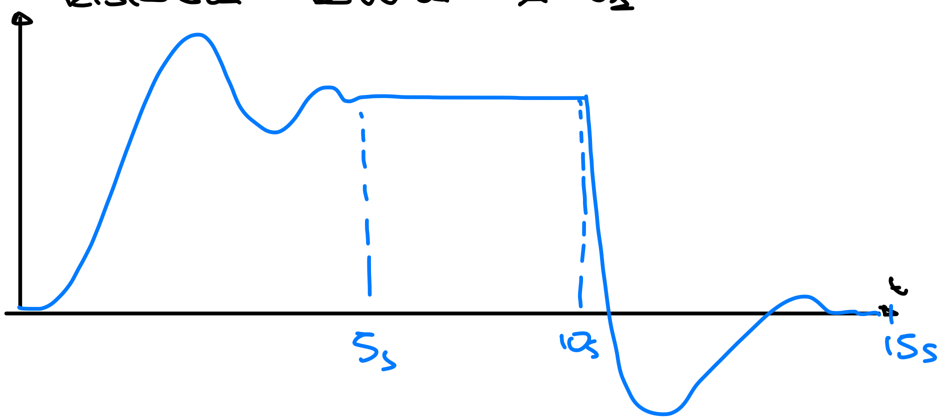
DERIVATA INIZIALE NULLA | DERIVATA INIZIALE NON-NULLA

RISPOSTE ALLO SCALINO

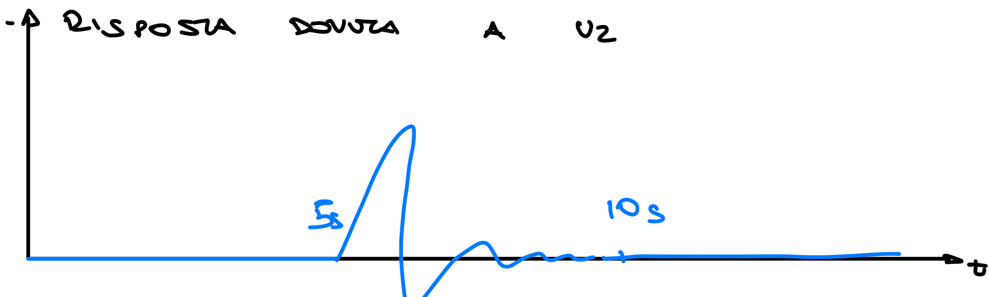


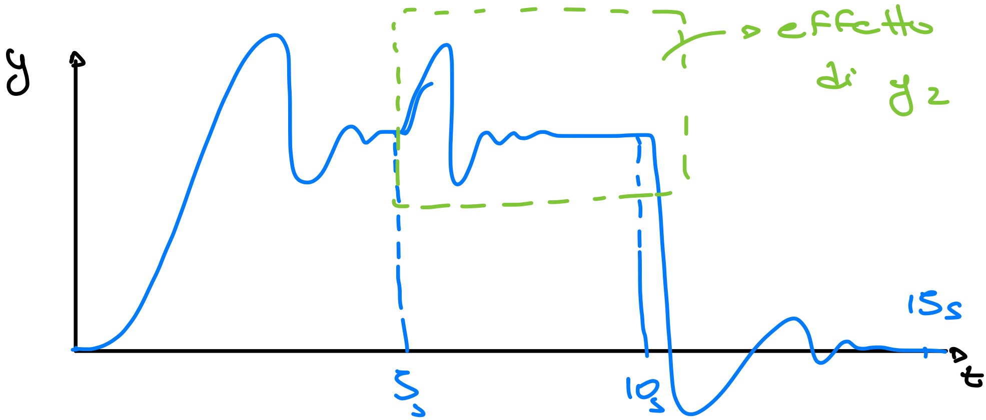


RISPOSTA DOVUTA A u_1



RISPOSTA DOVUTA A u_2

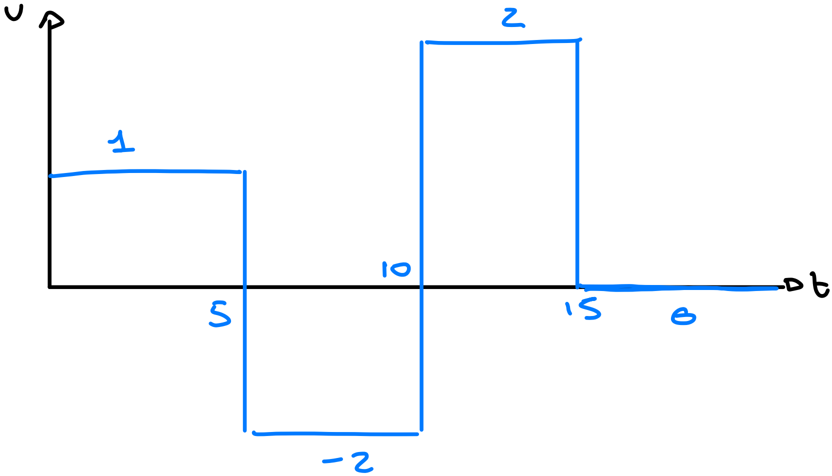




y
t
5s
10s
15s
effetto di y_2

ESERCIZIO 5

$$G(s) = 10 \frac{1 - 10s}{(1+s)(1+0.1s)^2}$$



1) RICAVARE LA RISPOSTA QUALITATIVA

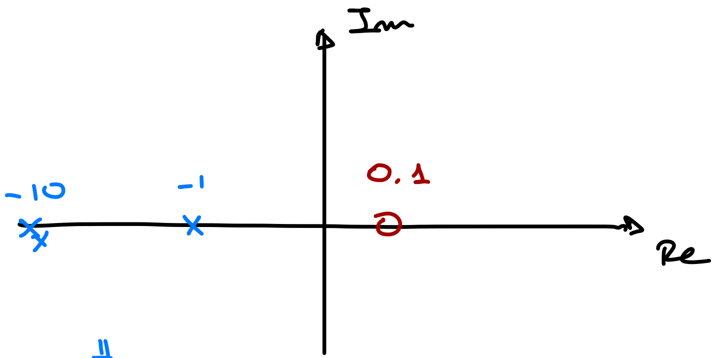
$$u(t) = sca(t) - 3\,sca(t-5) + 4\,sca(t-10) - 2\,sca(t-15)$$

$\Rightarrow$ BASTA CALCOLARE LA RISPOSTA $\tilde{y}$ ALLO SCALINO

$$y(t) = \tilde{y} - 3\tilde{y}(t-5) + 4\tilde{y}(t-10) + $$
$$- 2\tilde{y}(t-2)$$

$\Rightarrow$ CALCOLO RISPOSTA ALLO SCALINO

$$G(s) = \frac{10(1-10s)}{(s+1)(1+0.1s)^2}$$



$\Downarrow$

A.S.

CON POLO DOMINANTE IN -1

$T_a = 5s$

GRADO RELATIVO 2

$\Rightarrow$ CONDIZIONI INIZIALI NULLE

$\Rightarrow$ DERIVATA INIZIALE NULLA

$$\Rightarrow \ddot{y}(0) = \lim_{s \to \infty} s^2 G(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{10 s^2 (1 - 10s)}{(s+1)(s0.1+1)^2} = \lim_{s \to \infty} -\frac{100}{(0.1)^2} < 0$$

$\Downarrow$

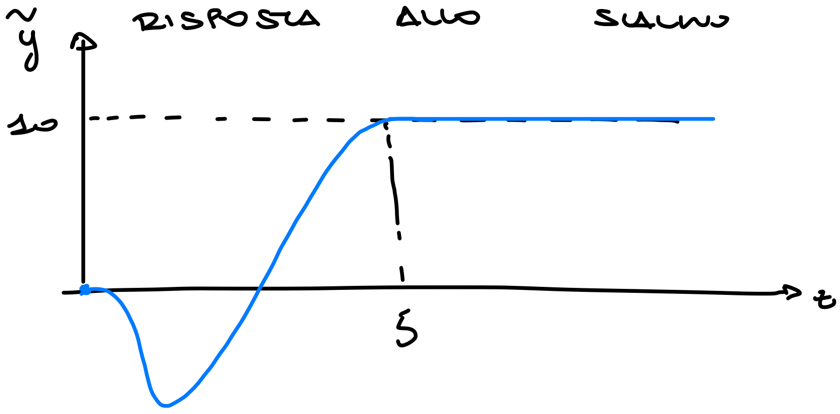
CONCAVITÀ VERSO IL BASSO

$\Rightarrow$ VALORE DI REGIME

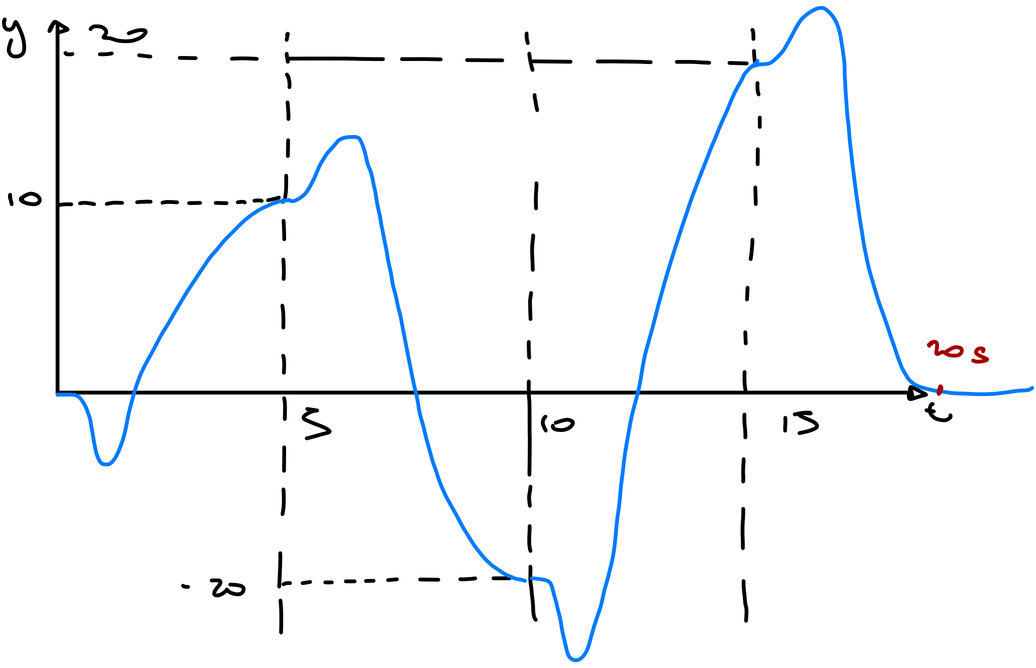
$$G(0) = 10$$

$\Rightarrow$ NO OSCILLAZIONI (POLI <u>REALI</u>)

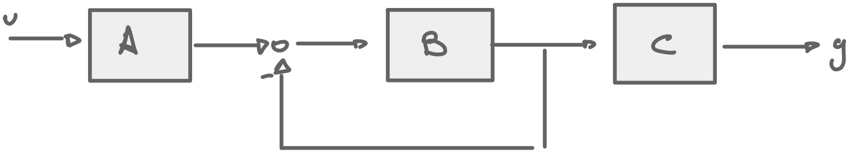
RISPOSTA ALLO SCALINO



$$u(t) = \text{sca}(t) - 3\,\text{sca}(t-5) + 4\,\text{sca}(t-10) - 2\,\text{sca}(t-15)$$



EXTRA

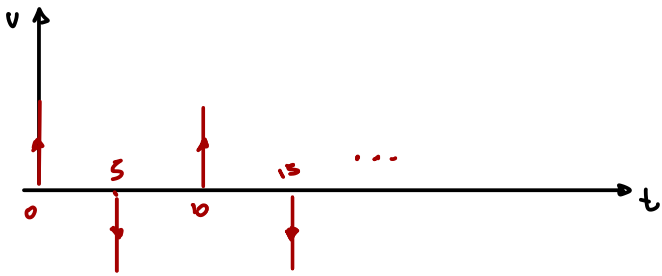


$$A(s) = \frac{1}{s}$$ ← INTEGRATORE

$$B(s) = \frac{10}{(s+1)^2}$$

$$C(s) = e^{-s}$$ ← RITARDO DI UN SECONDO

1) RICAVARE $y(t)$ QUANDO $u(t)$ È IL TRENO DI IMPULSI IN FIGURA



RICAVO $G(s)$: FDT DA u A y

$$G(s) = A(s) \frac{B(s)}{1+B(s)} C(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{s} \underbrace{\boxed{\frac{10}{s^2+2s+11}}}_{\tilde{G}(s)} e^{-s}$$

⇒ LA RISPOSTA ALL'IMPULSO DI $G(s)$ COINCIDE CON LA RISPOSTA ALLO SCALINO DI $\tilde{G}(s)$ IN RITARDO DI 1s.

⇒ CALCOLO RISPOSTA ALLO SCALINO DI $\tilde{G}(s)$

$$\tilde{G}(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 11}$$

(VEDI ES. 2)

⇒