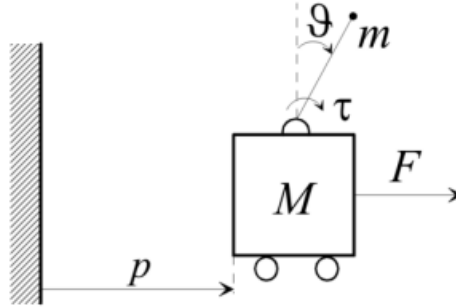


## Laboratorio Matlab – Fondamenti di Automatica

### Stabilizzazione di un pendolo inverso – Testo

Si consideri il sistema meccanico (carrello con pendolo inverso) riportato in figura:



Il carrello, di massa  $M$ , è in moto rettilineo sotto l'azione di una forza  $F$  e porta incernierata un'asta di massa trascurabile e lunghezza  $L$ , al cui estremo è presente una massa concentrata di valore  $m$ . Alla cerniera dell'asta è possibile esercitare una coppia  $\tau$ . Detta  $p$  la posizione del carrello e  $\vartheta$  la posizione angolare dell'asta, misurata come in figura, il modello matematico del sistema è il seguente:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{p} - mL\dot{\vartheta}^2 \sin(\vartheta) + mL\ddot{\vartheta} \cos(\vartheta) = F \\ mL^2\ddot{\vartheta} + mL\ddot{p} \cos(\vartheta) - mgL \sin(\vartheta) = \tau \end{cases}$$

Si noti che il sistema è non lineare; linearizzando le equazioni intorno allo stato di equilibrio caratterizzato da posizioni e velocità (lineari ed angolari) nulle e da forzanti (forza e coppia) nulle, esplicitando le derivate seconde si ottiene

$$\begin{cases} \delta\ddot{p} = -\frac{m}{M}g\delta\vartheta + \frac{1}{M}\delta F - \frac{1}{LM}\delta\tau \\ \delta\ddot{\vartheta} = \frac{g}{L}\frac{M+m}{M}\delta\vartheta - \frac{1}{LM}\delta F + \frac{1}{L^2}\frac{M+m}{Mm}\delta\tau \end{cases}$$

Si ponga  $M = 10$ ,  $m = 1$ ,  $L = 1$ ,  $g = 9.81$ .

1. Posto

$$\begin{array}{llll} x_1 = \delta p & x_2 = \dot{\delta p} & x_3 = \delta\vartheta & x_4 = \dot{\delta\vartheta}, \\ u_1 = \delta F & u_2 = \delta\tau & & \\ y_1 = \delta p & y_2 = \delta\vartheta & & \end{array}$$

si scrivano le equazioni di stato e uscita e da queste si ricavano le matrici  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  del sistema linearizzato.

2. Si verifichi che l'equilibrio è instabile.

3. Si verifichi che il sistema non è completamente raggiungibile, né completamente osservabile, qualora si utilizzino come ingresso la coppia  $\delta\tau$  ( $u_2$ ) e come uscita la posizione dell'asta  $\delta\vartheta$  ( $y_2$ ).

4. Si verifichi che il sistema è completamente raggiungibile e completamente osservabile utilizzando come ingresso la forza  $\delta F$  ( $u_1$ ) e come uscita la posizione  $\delta p$  ( $y_1$ ) del carrello.

5. Con riferimento al punto precedente, si progetti un regolatore tale che

- la legge di controllo  $k$ , agendo sulla forza  $\delta F(u_1)$ , assegni gli autovalori del sistema di controllo come radici del polinomio:

$$\gamma^o(s) = (s^2 + 1.5s + 1)(s^2 + 2s + 1)$$

- il ricostruttore dello stato  $l$ , misurando  $\delta p(y_1)$ , assegni gli autovalori della dinamica dell'errore di ricostruzione come radici del polinomio:

$$\gamma^o(s) = (s^2 + 15s + 100)(s^2 + 20s + 100)$$

6. Rappresentare l'andamento della posizione dell'asta del sistema linearizzato regolato, partendo

da condizioni iniziali  $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{6} \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$ , note con un'incertezza pari a  $\begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02 \\ -0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix}$ .

7. Ripetere il punto precedente per il sistema non lineare.