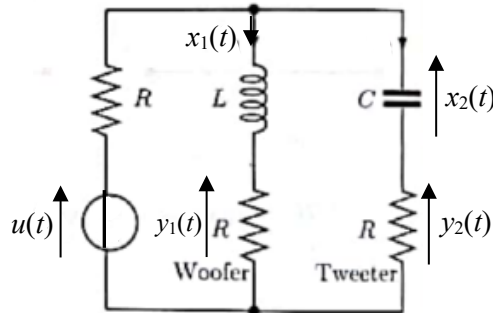


## Laboratorio 3 per Fondamenti di Automatica (Matematici)

### Esercizio 1

Nel circuito elettrico in figura



indichiamo con  $x_1(t)$  la corrente che attraversa l'induttore e con  $x_2(t)$  la tensione ai capi del condensatore. Sia inoltre  $u(t)$  la tensione applicata dal generatore di tensione ideale al circuito, mentre  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  le tensioni ai capi di woofer e tweeter, rispettivamente. Le equazioni di stato e uscita che descrivono il circuito elettrico sono<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{3R}{2L}x_1 + \frac{1}{2L}x_2 + \frac{1}{2L}u \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{2C}x_1 - \frac{1}{2RC}x_2 + \frac{1}{2RC}u \\ y_1 &= Rx_1 \\ y_2 &= -\frac{R}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}u\end{aligned}$$

da cui

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3R}{2L} & \frac{1}{2L} \\ -\frac{1}{2C} & -\frac{1}{2RC} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2L} \\ \frac{1}{2RC} \end{bmatrix} \quad c_1 = [R \quad 0] \quad c_2 = \left[-\frac{R}{2} \quad -\frac{1}{2}\right] \quad d_1 = 0 \quad d_2 = \frac{1}{2}$$

Scriviamo il modello in Matlab

```
% parametri
R=8;
C=3.76*10^(-6);
L=7.5*10^(-4);

% sistema
A=[-3*R/(2*L)    1/(2*L);
   -1/(2*C)      -1/(2*R*C)];
```

$$^1 \dot{x}_1 = \frac{1}{L}[u - R(x_1 + C\dot{x}_2) - Rx_1] \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C} \left[ \frac{Rx_1 + L\dot{x}_1 - x_2}{R} \right] \quad (2)$$

$$(1) + \frac{RC}{L} \cdot (2) \rightarrow \dot{x}_1 = -\frac{3R}{2L}x_1 + \frac{1}{2L}x_2 + \frac{1}{2L}u$$

$$\frac{L}{RC} \cdot (1) - (2) \rightarrow \dot{x}_2 = -\frac{1}{2C}x_1 - \frac{1}{2RC}x_2 + \frac{1}{2RC}u$$

$$y_1 = Rx_1$$

$$y_2 = Rx_1 + L\dot{x}_1 - x_2 = -\frac{R}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}u$$

```

b=[1/(2*L)          1/(2*R*C)]';
c1=[R  0];
c2=[-R/2  -1/2];
d1=0;
d2=1/2;

```

```

woofer=ss(A,b,c1,d1);
tweeter=ss(A,b,c2,d2);

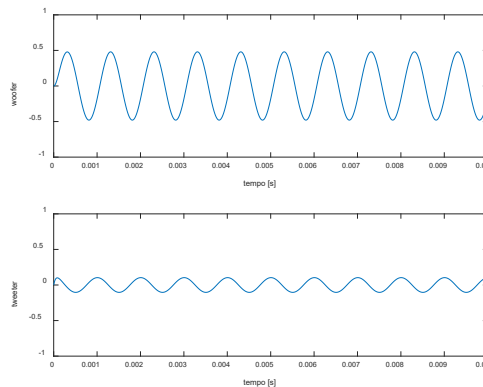
```

Per verificare che la frequenza di crossover  $f_{cr}$  sia pari a quella richiesta, 0.5 kHz, simuliamo il sistema alimentando il circuito con un segnale sinusoidale in ingresso di frequenza pari a 1 kHz (alta frequenza)<sup>2</sup>. In caso di buon funzionamento del sistema di riproduzione audio, tale segnale deve essere filtrato dal woofer e passare bene nel tweeter.

```

% simulazione con ingresso sinusoidale di frequenza 1 kHz
freq=1000; periodo=1/freq;
T=linspace(0,10*periodo,1000);
U=sin(2*pi*freq*T);
Ywoofer=lsim(woofer,U,T);
Ytweeter=lsim(tweeter,U,T);
figure;
subplot(2,1,1); plot(T,Ywoofer); xlabel('tempo [s]'); ylabel('woofer'); ylim([-1 1]);
subplot(2,1,2); plot(T,Ytweeter); xlabel('tempo [s]'); ylabel('tweeter'); ylim([-1 1]);

```



La simulazione mostra tuttavia un risultato opposto a quello aspettato: il segnale di ingresso passa bene nel woofer e viene attenuato dal tweeter. Si può anche ascoltare ciò che accade utilizzando il file sonoro\_f.m

```
sonoro_f(1000,R,L,C);
```

(l'argomento, 1000, è la frequenza scelta per il segnale in ingresso)

Il primo suono è quello generato dal segnale di ingresso a 1 kHz, il secondo è il suono in uscita dal woofer, il terzo è quello in uscita dal tweeter. Se il dispositivo di riproduzione funzionasse correttamente il secondo segnale (uscita dal woofer) dovrebbe essere attutito rispetto al segnale di ingresso mentre il terzo (uscita dal tweeter) dovrebbe essere pari a questo. Ma così non è, anzi è il contrario!

Anche aumentando la frequenza del segnale di ingresso, per esempio a 1.5 kHz, non si nota differenza. Solo per frequenze molto elevate (4 kHz) il suono viene filtrato dal woofer passando bene nel tweeter.

---

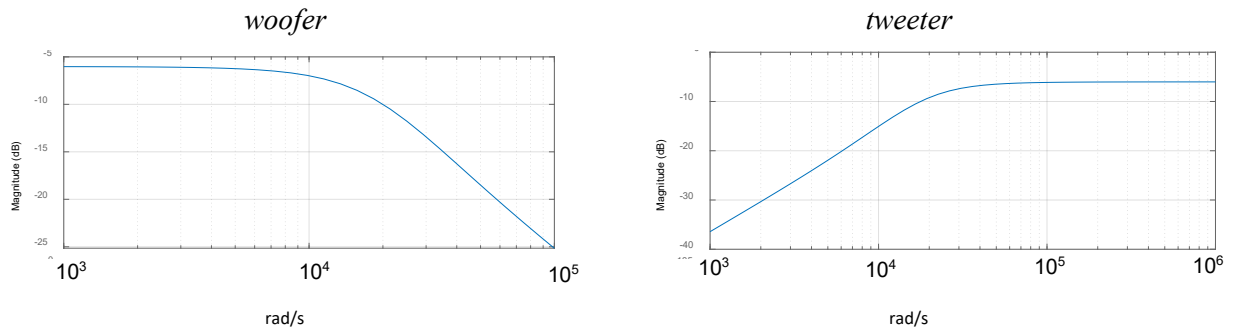
<sup>2</sup> Se la frequenza delle oscillazioni è di 1 kHz, il periodo è pari a 0.001 s. Volendo visualizzare 10 oscillazioni, l'intervallo di tempo di simulazione è pari a 0.01 s.

Mediante i diagrammi di Bode del modulo delle funzioni di trasferimento  $G_1$  da  $u$  a  $y_1$  e  $G_2$  da  $u$  a  $y_2$  è possibile giustificare tali comportamenti. Tracciamo i diagrammi con Matlab<sup>3</sup> e valutiamo la banda passante<sup>4</sup> per  $G_1$  e  $G_2$ .

```
% Diagrammi di Bode per il woofer
figure; bode(woofer); grid;

% Diagrammi di Bode per il tweeter
figure; bode(tweeter); grid;

% calcolo della banda passante
% woofer
V=linspace(-4,10,50000); W=10.^V; % V=log10(W) -> W=10^V
[MAG, PHASE, OMEGA]=bode(woofer,W);
ind=max(find(MAG>MAG(1)/sqrt(2)));
Bp_woofer=OMEGA(ind);
% tweeter
[MAG, PHASE, OMEGA]=bode(tweeter,W);
ind=min(find(MAG>MAG(length(MAG))/sqrt(2)));
Bp_tweeter=OMEGA(ind);
```



I rami del circuito di woofer e di tweeter si comportano come filtri passa basso e passa alto, rispettivamente. L'estremo superiore della banda passante per il woofer ( $Bp\_woofer$ ) è pari a  $1.7211 \cdot 10^4$  rad/s, mentre l'estremo inferiore della banda passante per il tweeter ( $Bp\_tweeter$ ) è pari a  $2.0603 \cdot 10^4$  rad/s.

Tali estremi si trovano in prossimità della pulsazione naturale  $\omega_n$  dei due poli complessi coniugati ( $p_{1,2} = a \pm ib$  con  $\omega_n = \sqrt{a^2 + b^2}$ ) che caratterizzano le funzioni di trasferimento  $G_1$  e  $G_2$  che, salvo semplificazioni numeratore/denominatore, sono pari agli autovalori della matrice di stato  $A$ . Infatti:

```
poli=eig(A)
poli =
    1.0e+04 *
   -1.6311 + 0.9410i
   -1.6311 - 0.9410i
```

da cui

```
omegan=sqrt(real(poli(1,1))^2+imag(poli(1,1))^2)
omegan =
    1.8831e+04
```

<sup>3</sup> Il comando Matlab con il quale si calcola la funzione di trasferimento è *tf*. In questo esempio:

```
% Woofer [NUM1,DEN1]=ss2tf(A,b,c1,d1); sistema1=tf(NUM1,DEN1);
% Tweeter [NUM2,DEN2]=ss2tf(A,b,c2,d2); sistema2=tf(NUM2,DEN2);
```

<sup>4</sup> Banda passante  $B = \{\omega / \frac{G(i\omega)^{MAX}}{\sqrt{2}} \leq G(i\omega) \leq G(i\omega)^{MAX}\}$

Pertanto, approssimando la pulsazione di crossing  $\omega_{cr}$  con al pulsazione naturale  $\omega_n$ , la frequenza di crossing per il dispositivo assegnato è circa pari a  $f_{cr} = \frac{1.883 \cdot 10^4}{2\pi} \sim 3 \text{ kHz}$ ; il sistema di riproduzione audio non soddisfa la specifica di progetto richiesta ( $f_{cr} = 0.5 \text{ kHz}$ ).

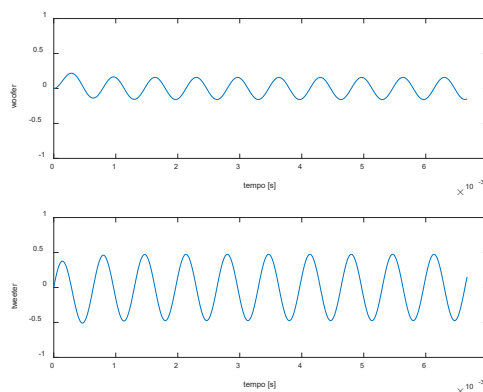
Nel progettare un sistema di riproduzione che ponga la frequenza di crossing  $f_{cr}$  in  $0.5 \text{ kHz}$ , si può, ad esempio, scegliere  $L$  e  $C$  facendo in modo che i due poli (gli autovalori di  $A$ ) siano reali coincidenti in  $\omega_{cr} = 2\pi f_{cr} = 2\pi \cdot 0.5 \cdot 10^3 \sim 3.14 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$ .

Il polinomio caratteristico della matrice  $A = \begin{bmatrix} -\frac{3R}{2L} & \frac{1}{2L} \\ -\frac{1}{2C} & -\frac{1}{2RC} \end{bmatrix}$  (con  $\text{tr}(A) = -\frac{3R}{2L} - \frac{1}{2RC}$  e  $\det(A) = \frac{1}{LC}$ ) è dato da:  
 $\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 + (\frac{3R}{2L} + \frac{1}{2RC})\lambda + \frac{1}{LC}$ . Con poli coincidenti  $p_1 = p_2 = p$ , si ha  $\Delta_A(\lambda) = (\lambda - p)^2 = \lambda^2 - 2p\lambda + p^2$  da cui  $p = -\sqrt{\frac{1}{LC}}$  e  $p = -\frac{1}{2}(\frac{3R}{2L} + \frac{1}{2RC})$ . Uguagliando tali valori, si ottiene  $(L - R^2C)(L - 9R^2C) = 0$ . Volendo porre  $|p| = \omega_{cr}$ , una possibile scelta è:  $L = R^2C$  con  $C = \frac{1}{R\omega_{cr}}$ .

```
R=8;
fcr=500;
omegacr=2*pi*fcr;
C=1/(R*omegacr);
L=R^2*C;
A=[-3*R/(2*L)    1/(2*L)
   -1/(2*C)      -1/(2*R*C)];
b=[1/(2*L)        1/(2*R*C)]';
woofer=ss(A,b,c1,d1);
tweeter=ss(A,b,c2,d2);
```

Vediamo come viene ora filtrato il segnale sinusoidale in ingresso di frequenza pari a  $1 \text{ kHz}$ .

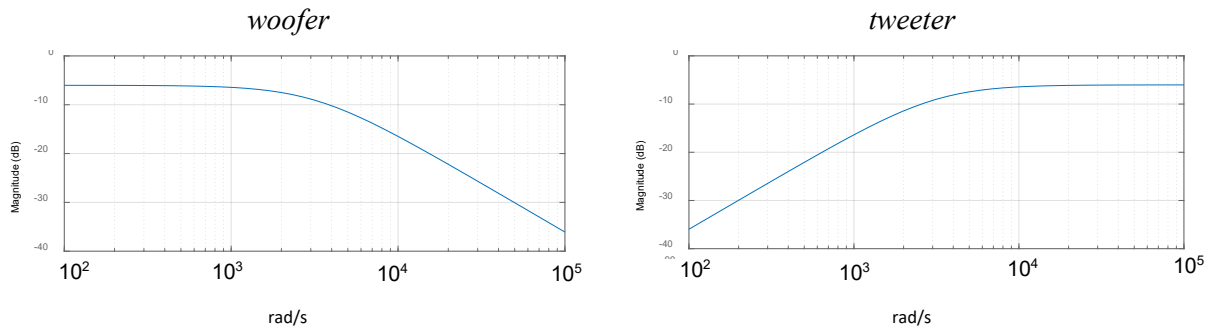
```
Ywoofer=lsim(woofer,U,T);
Ytweeter=lsim(tweeter,U,T);
figure;
subplot(2,1,1); plot(T,Ywoofer); xlabel('tempo [s]'); ylabel('woofer'); ylim([-1 1]);
subplot(2,1,2); plot(T,Ytweeter); xlabel('tempo [s]'); ylabel('tweeter'); ylim([-1 1]);
```



La simulazione mostra il risultato atteso: il segnale di ingresso viene filtrato dal woofer e passa bene nel tweeter. Si può anche ascoltare con `sonoro_f(1000,R,L,C)`, oppure ripetere l'esperimento per frequenza pari a  $2000 \text{ Hz}$ . Al contrario, segnali in ingresso con frequenza inferiore a  $500 \text{ Hz}$  sono filtrati dal tweeter (`sonoro_f(200,R,L,C)`). Si può infine ascoltare l'effetto relativo a un ingresso con frequenza variabile da  $100$  a  $2000 \text{ Hz}$  con `sweep(R,L,C)`.

Mediante i diagrammi di Bode del modulo delle funzioni di trasferimento è possibile giustificare tali comportamenti.

```
figure; bode(woofer); grid;
figure; bode(tweeter); grid;
```

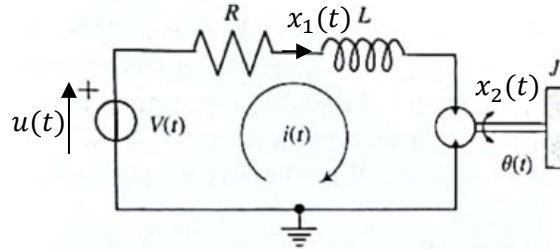


La banda passante (delimitata superiormente da  $Bp\_woofer$  e inferiormente da  $Bp\_tweeter$ , per il woofer e tweeter, rispettivamente) è ora circa data da  $\omega_{cr} = 3.14 \cdot 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow f_{cr} = 500 \text{ Hz}$

```
% woofer
V=linspace(-4,10,50000); W=10.^V; % V=log10(W) -> W=10^V
[MAG,PHASE,OMEGA]=bode(woofer,W);
ind=max(find(MAG>MAG(1)/sqrt(2)));
Bp_woofer=OMEGA(ind);
% tweeter
[MAG,PHASE,OMEGA]=bode(tweeter,W);
ind=min(find(MAG>MAG(length(MAG))/sqrt(2)));
Bp_tweeter=OMEGA(ind);
```

## Esercizio 2

Indichiamo con  $u(t)$  la tensione applicata al circuito (in Volt [V]), con  $x_1(t)$  la corrente che attraversa il circuito (in Ampere [A]) e con  $x_2(t)$  la velocità dell'albero motore (in rad/s). Sia  $y(t)$  la variabile di uscita da controllare (in giri/min) e  $d(t)$  la coppia di attrito sull'albero motore che dipende dalla raffica di vento.



Le equazioni di stato e di uscita che caratterizzano il circuito sono:

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{L}[u(t) - Rx_1(t) - hx_2(t)]$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{J}[-qx_2(t) + hx_1(t) - kd(t)]$$

$$y(t) = \frac{60}{2\pi}x_2(t)$$

dove il termine  $hx_2(t)$  caratterizza la forza elettromotrice indotta generata nel circuito dalla rotazione dell'albero motore, il termine  $qx_2(t)$  la coppia di attrito, il termine  $hx_1(t)$  la coppia impressa sul motore dal circuito e il termine  $kd(t)$  la coppia di attrito generata sull'albero motore dalla raffica di vento.

Le matrici e i vettori che definiscono il sistema sono:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{h}{L} \\ \frac{h}{J} & -\frac{q}{J} \end{bmatrix} \quad b_u = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_d = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{k}{J} \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 0 & \frac{60}{2\pi} \end{bmatrix} \quad d = 0$$

Il sistema è asintoticamente stabile, dato che  $tr(A) = -\frac{R}{L} - \frac{q}{J} < 0$  e  $det(A) = \frac{Rq+h^2}{LJ} > 0$ . Pertanto, fissato  $\bar{u}$ , il sistema ammette un unico stato di equilibrio  $\bar{x}$  verso cui tende. In particolare

$$\bar{x}_1 = \frac{q}{Rq+h^2}\bar{u} \quad \bar{x}_2 = \frac{h}{Rq+h^2}\bar{u} \quad \bar{y} = \frac{60}{2\pi} \frac{h}{Rq+h^2}\bar{u}$$

I valori dei parametri sono i seguenti:

$$\begin{array}{lll} R = 48 \text{ m}\Omega & L = 750 \text{ mH} & J = 8.37 \cdot 10^{-7} \text{ kg m}^2 \\ q = 8.7 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} & h = 9.1 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} & k = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} \end{array}$$

In assenza di disturbo, il valore di equilibrio dell'uscita (valutato per  $\bar{u} = 1\text{V}$ ) è  $\bar{y} \sim 1000$  giri/min

```
R=48*10^(-3);
L=75*10^(-2);
J=8.37*10^(-7);
q=8.7*10^(-5);
h=9.1*10^(-3);
k=0.2*10^(-3);
A=[-R/L  -h/L;
    h/J   -q/J];
bu=[1/L  0]';           % ruolo di u sullo stato
bd=[0  -k/J]';          % ruolo di d sullo stato
c=[0      60/(2*pi)];    % velocità albero motore y=x2*60/(2*pi)
d=0;
% equilibrio in assenza di disturbo
```

```

ueq=1; % tensione di ingresso pari a 1V
xeq=-inv(A)*bu*ueq;
yeq=c*xeq+d*ueq; % giri/min albero motore
yeq

```

Il valore ottenuto per la velocità di rotazione dell'albero motore per unità di voltaggio applicato è quindi in linea con le specifiche del motore elettrico (fornite dal suo produttore).

### CONTROLLO IN ANELLO APERTO

Analizziamo ora il funzionamento del motore elettrico in assenza di sistema di controllo.

Indicando con  $G(s)$  la funzione di trasferimento del sistema da  $u$  a  $y$ , il valore di regime dell'uscita ottenuto per ingresso costante è dato da:  $\bar{y} = G(0)\bar{u} = \mu\bar{u}$  dove  $G(0) = \mu$  è il guadagno del sistema.

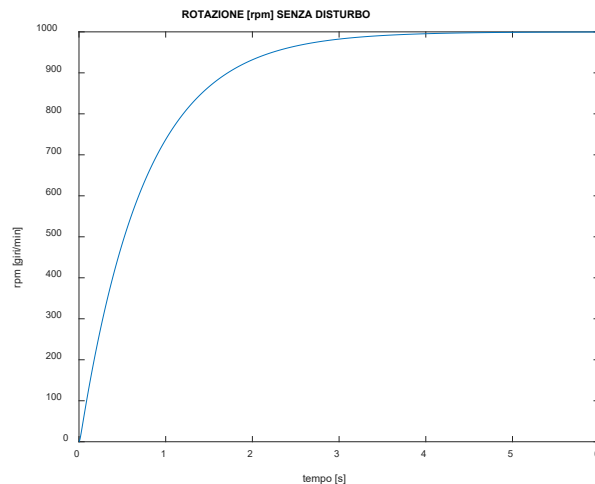
Volendo quindi portare la velocità dell'albero motore a una velocità di rotazione desiderata  $\bar{w}$  basterà fissare il segnale di ingresso al valore  $\bar{u} = \frac{\bar{w}}{\mu}$ .

Come esempio, supponiamo di partire da motore fermo e di voler portare la velocità di rotazione a 1000 giri/min.

```

% simulazione: da motore fermo a 1000 giri/min (w)
[NUM,DEN]=ss2tf(A,bu,c,d);
G=tf(NUM,DEN); % fdt da w a y
[NUMd,DEND]=ss2tf(A,bd,c,d);
Gd=tf(NUMd,DEND); % fdt da d a y
% assenza di disturbo
T=linspace(0,6,1000);
w=1000; % velocità desiderata
u=w/dcgain(G); % y=G(0)u -> u=w/G(0)
y_wy=u*step(G,T);
figure(1);
plot(T,y_wy); hold on; xlabel('tempo [s]'); ylabel('rpm [giri/min]');
title('ROTAZIONE [rpm] SENZA DISTURBO');

```



L'albero motore si porta alla velocità di rotazione desiderata; tuttavia, il tempo necessario per raggiungere il nuovo comportamento a regime (tempo di risposta) è troppo elevato (circa 3.7 secondi).

```

% calcolo del tempo di risposta
autov=eig(A);
autov_dom=max(abs(autov));
TD=-1/autov_dom;
TR=5*TD % TR è circa pari a 3.7s (troppo!)

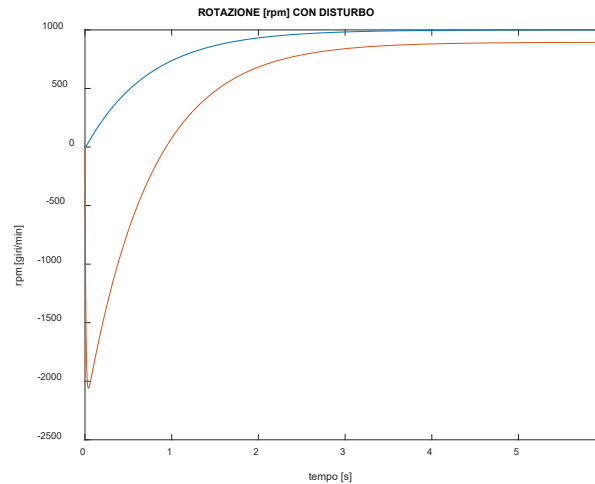
```

Inoltre, se sull'elica applicata all'albero motore agisse, come disturbo  $d(t)$ , una raffica di vento (di intensità non nota), sull'albero motore agirebbe una coppia di attrito  $kd(t)$ .

Con disturbo costante  $\bar{d}$ , l'uscita di regime diventerebbe pari a  $\bar{y} = G(0)\bar{u} + G_d(0)\bar{d}$  dove  $G(s)$  è la funzione di trasferimento da  $u$  a  $y$  e  $G_d(s)$  quella da  $d$  a  $y$ <sup>5</sup>. Pertanto, in assenza di controllo, il sistema ritroverebbe in uscita l'effetto del disturbo.

Verifichiamo ciò via simulazione, sottoponendo nella simulazione precedente il sistema a una raffica di vento costante, cioè a un disturbo  $d$  costante pari, per esempio, a 100.

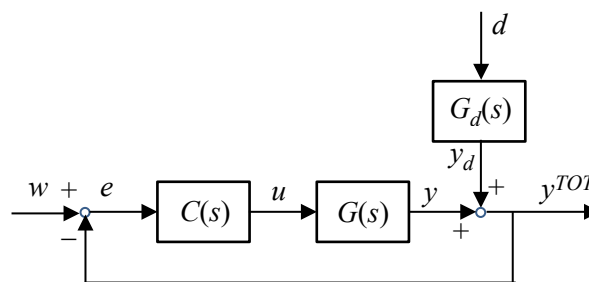
```
% disturbo costante: raffica di vento sull'elica da motore fermo a 1000 giri/min (w)
disturbo=100;
y_dy=disturbo*step(Gd,T);
ytot=y_wy+y_dy;
figure(1); plot(T,ytot); title('ROTAZIONE [rpm] CON DISTURBO');
% in anello aperto il disturbo "si ritrova" sull'uscita
```



La velocità di rotazione dell'albero motore è ora differente da quella desiderata (risente del disturbo). Ovviamente il tempo di risposta (dipendente dalla sola matrice di stato  $A$ ) non cambia.

### CONTROLLO IN ANELLO CHIUSO

Per ridurre il tempo di risposta e fare in modo che il disturbo non sia presente sull'uscita a regime, proviamo a progettare un controllore integrale  $C(s) = \frac{k_i}{s}$  caratterizzante il seguente schema di controllo in anello chiuso



Le funzioni di trasferimento sono:

$$L(s) = C(s)G(s)$$

$$Y(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} W(s) + \frac{G_d(s)}{1 + L(s)} D(s)$$

<sup>5</sup> Applicando l'operatore  $s$  alle equazioni di stato si ottiene:  $G(s) = \frac{60}{2\pi} \frac{h}{JL} \frac{1}{s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{q}{J}\right)s + \frac{Rq+h^2}{LJ}} = \frac{N(s)}{\Delta(s)}$  e

$$G_d(s) = -\frac{60}{2\pi} \frac{k}{JL} \frac{Ls+R}{s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{q}{J}\right)s + \frac{Rq+h^2}{LJ}} = \frac{N_d(s)}{\Delta(s)}, \text{ con } N(s) = \frac{60}{2\pi} \frac{h}{JL}, N_d(s) = -\frac{60}{2\pi} \frac{k}{JL} (Ls+R) \text{ e } \Delta(s) = s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{q}{J}\right)s + \frac{Rq+h^2}{LJ}$$



$$F_{wy}(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

$$F_{dy}(s) = \frac{G_d(s)}{1 + L(s)}$$

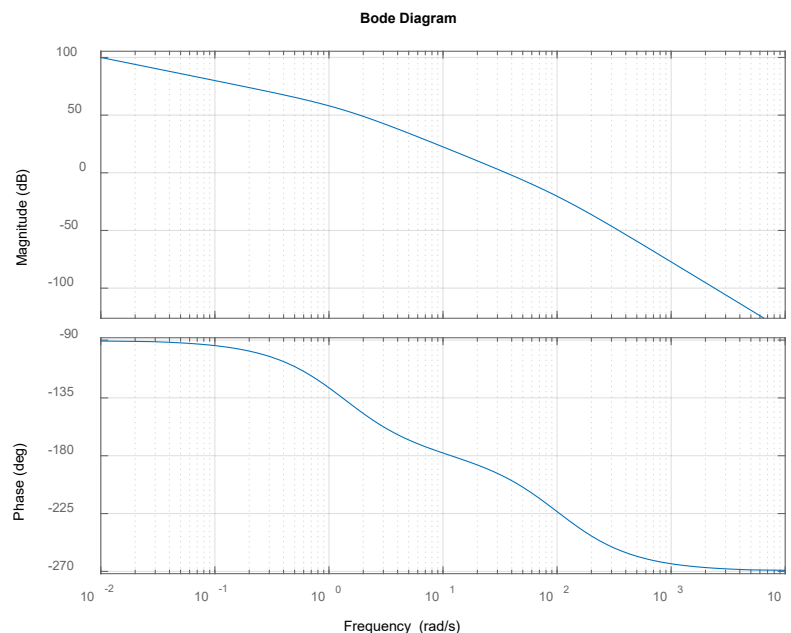
$$E(s) = \frac{1}{1 + L(s)} W(s) - \frac{G_d(s)}{1 + L(s)} D(s)$$

dove  $C(s) = \frac{k_i}{s}$ ,  $G(s) = \frac{N(s)}{\Delta(s)}$  (propria) e  $G_d(s) = \frac{N_d(s)}{\Delta(s)}$  (propria) con  $\Delta(s) = \det(sI - A) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)$ .

Così facendo, la funzione di trasferimento di anello  $L(s)$  avrà un polo nell'origine e il sistema di controllo (se asintoticamente stabile) annullerà a regime gli effetti di un disturbo sull'uscita.

Tracciamo il diagramma di Bode della fase di  $L(s)$  per un qualunque valore di  $k_i$  (si noti che, se  $k_i$  non varia di segno, tale diagramma non varia mentre il diagramma del modulo trasla verso l'alto (basso) se  $k_i$  aumenta (diminuisce))

```
ki=1;
C=ki*tf(1,[1 0]);
L=C*G;
figure(2); bode(L); grid;
```



Volendo per il sistema di controllo un tempo di risposta  $T_R = \frac{5}{\omega_c} = 0.5s$ , la sua pulsazione critica dovrà essere pari a  $\omega_c = \frac{5}{T_R} = 10 \text{ rad/s}$ . Tuttavia, in corrispondenza di tale valore, la fase critica è di poco superiore a  $-\pi$ , così che il margine di fase, sebbene positivo, risulta decisamente prossimo a zero. Il sistema di controllo è asintoticamente stabile ma non lo è in senso robusto.

NOTA: Il tempo di risposta è anche più alto del valore desiderato (27.2s) essendo i poli del sistema in anello chiuso complessi coniugati e prossimi all'asse immaginario. Infatti, dato che il margine di fase  $\varphi_m$  è circa  $0^\circ$ , la fase critica  $\varphi_c$  è circa  $-\pi$  ( $\varphi_m =$

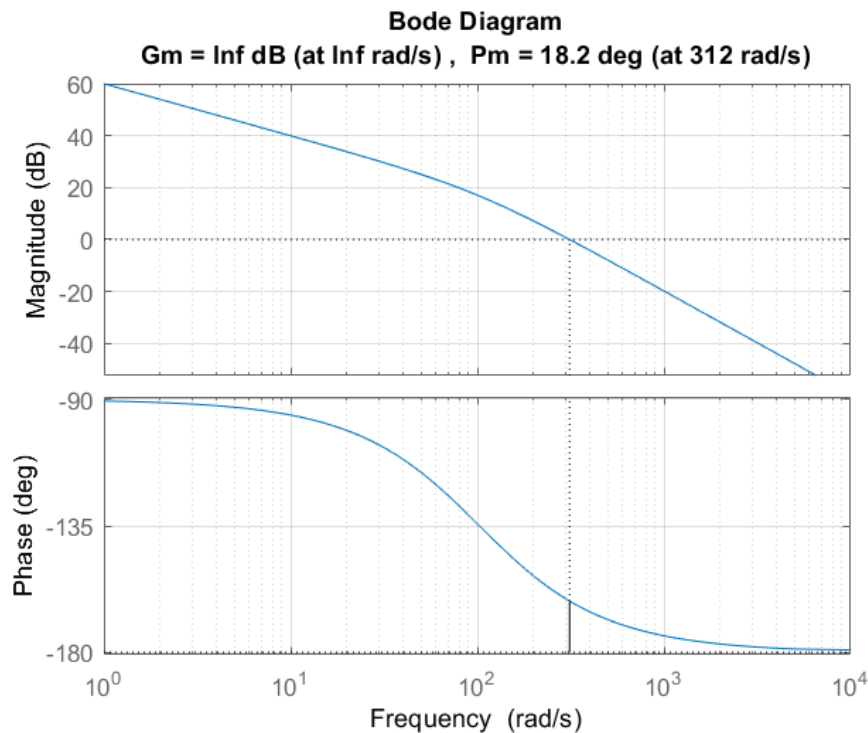
$\pi - |\varphi_c|$ ). Pertanto,  $L(i\omega_c) \sim -1$  e gli autovalori del sistema di controllo (soluzioni di  $1 + L(s) = 0$ ) sono prossimi a  $\pm i\omega_c$ , cioè hanno parte reale piccola. Di conseguenza il tempo di risposta sarà più elevato.

Per stabilizzare maggiormente il sistema aggiungiamo al controllore integrale uno zero che cancelli il polo dominante in  $G(s)$  (controllore PI) <sup>6</sup>:

$$C(s) = \frac{k_i}{s}(1 + \tau s)$$

Così facendo, si alza la fase della funzione di trasferimento di anello (anche  $\varphi_c$ ), potendo così garantire la stabilità (robusta) del sistema di controllo (se  $\varphi_c$  aumenta (è negativa!) anche  $\varphi_m = \pi - |\varphi_c|$  aumenta).

```
ki=1;
tau=-1/max(autov); % polo dominante di G
C=ki*tf(1,[1 0])*tf([tau 1],1);
L=C*G;
figure(3); margin(L); grid;
```

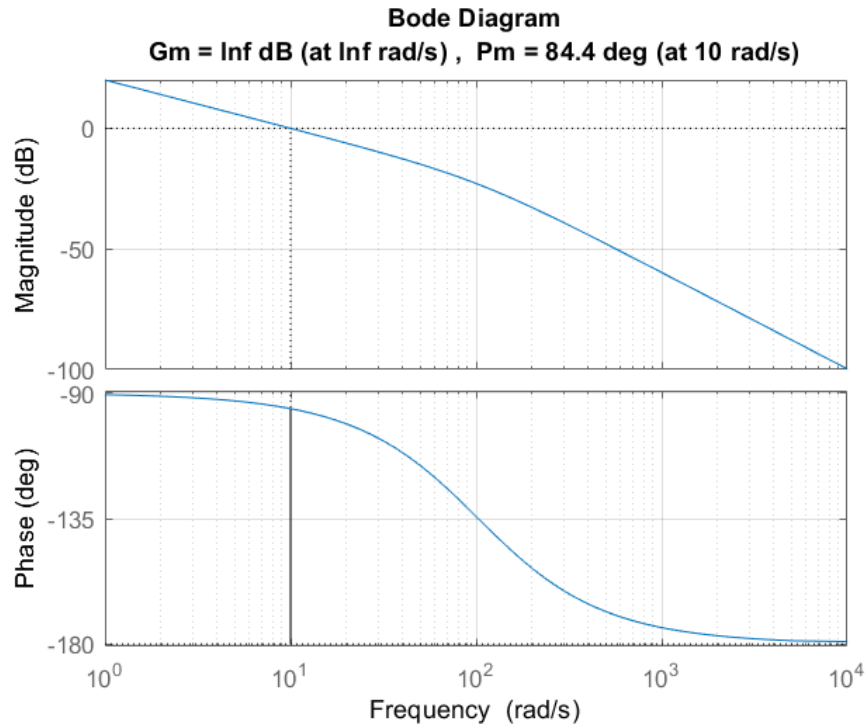


La fase è sempre superiore a  $-\pi$  così che il margine di fase è sempre positivo e il sistema di controllo asintoticamente stabile. Occorre però traslare verso l'alto (aumentando  $k_i$ ) il diagramma del modulo affinché la pulsazione critica  $\omega_c$  diventi pari a 10.

```
omegac=10;
[MAG, PHASE]=bode(L,omegac);
ki=ki/MAG;
C=ki*tf(1,[1 0])*tf([tau 1],1);
L=C*G;
figure(3); margin(L); grid;
```

<sup>6</sup> Si noti che il controllore così costruito è un controllore ad azione proporzionale-integrale (PI)

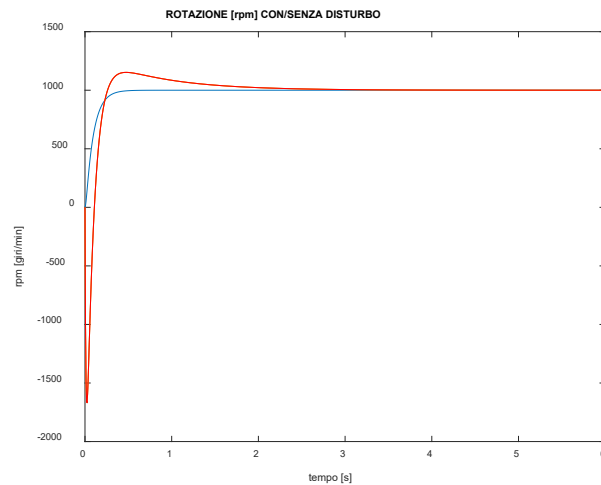
$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = \tau k_i + \frac{k_i}{s} = \frac{k_i}{s}(1 + \tau s)$$



Il margine di fase è ora decisamente positivo garantendo così la stabilità robusta del sistema di controllo. Simuliamo ora il sistema di controllo per portare l'albero motore da fermo a velocità di rotazione a 1000 giri/min, in assenza disturbo (linea blu) e presenza di disturbo (linea rossa).

```
% simulo senza disturbo
y_wy=w*step(L/(1+L),T);
figure(4);
plot(T,y_wy); hold on; xlabel('tempo [s]'); ylabel('rpm [giri/min]'); title('ROTAZIONE
[rpm] SENZA DISTURBO');
% y tende a regime in circa mezzo secondo

% simulo con disturbo
y_dy=disturbo*step(Gd/(1+L),T);
ytot=y_wy+y_dy;
figure(4); plot(T,ytot); title('ROTAZIONE [rpm] CON/SENZA DISTURBO');
```



In entrambi i casi (assenza di disturbo in blu e presenza di disturbo in rosso) la velocità di rotazione dell'albero motore tende al valore desiderato ( $w = 1000$  giri/min); in particolare, quindi, il sistema di controllo è in grado di azzerare a regime l'effetto della raffica di vento sulla velocità di rotazione.

In assenza di disturbo, il valore di regime viene effettivamente raggiunto in circa 0.5s; tuttavia, in presenza di disturbo, il tempo necessario affinché ciò avvenga resta pari al tempo di risposta del sistema (troppo elevato rispetto alla specifica richiesta). Ciò è dovuto al fatto che l'autovalore dominante in  $G(s)$ , cancellato dallo zero in  $-\frac{1}{\tau}$  del controllore PI, non viene più semplificato nella funzione di trasferimento da  $d$  a  $y^{TOT}$  mentre lo era nella funzione di trasferimento da  $w$  a  $y^{TOT}$ <sup>8</sup>.

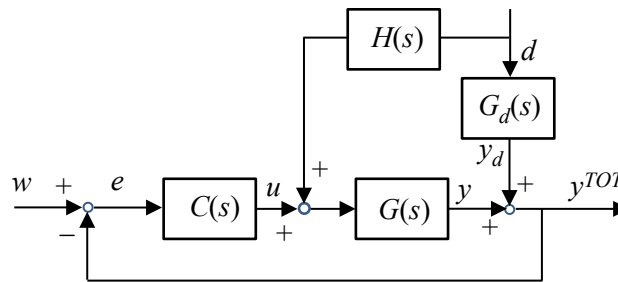
Tutto ciò se supponiamo di non poter misurare il disturbo  $d$ .

Tuttavia, se il sistema si trova inizialmente a riposo  $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 0)$ , o nella condizione di equilibrio  $(x_1(0), x_2(0)) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (\frac{q}{Rq+h^2}\bar{u}, \frac{h}{Rq+h^2}\bar{u})$  corrispondente al solo ingresso  $\bar{u}$ , e viene sollecitato da riferimento  $w$  e disturbo  $d$  costanti, quest'ultimo può essere stimato dalla relazione<sup>9</sup>:

$$\dot{y}^{TOT}(0) = -\frac{60k}{2\pi J}d \sim \frac{y^{TOT}(\Delta t) - y^{TOT}(0)}{\Delta t} \rightarrow d \sim -\frac{2\pi J}{60k} \frac{y^{TOT}(\Delta t) - y^{TOT}(0)}{\Delta t}$$

con  $\Delta t$  sufficientemente piccolo<sup>10</sup>.

Supponendo quindi il disturbo  $d$  “misurabile” secondo la procedura appena descritta, cerchiamo di compensarne l'effetto sull'uscita mediante la funzione di trasferimento  $H(s)$  introdotta nello schema seguente:



Dove  $Y_{TOT}(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}W(s) + \frac{G_d(s)+G(s)H(s)}{1+L(s)}D(s)$  e  $E(s) = \frac{1}{1+L(s)}W(s) - \frac{G_d(s)+G(s)H(s)}{1+L(s)}D(s)$ .

Fissando  $H(s) = -\frac{G_d(s)}{G(s)} = -\frac{N_d(s)}{N(s)}$  si annullerebbe l'effetto del disturbo sull'errore; tuttavia, dato che  $G(s)$  non ha zeri (zero(G)) mentre  $G_d(s)$  ne ha uno (zero(Gd)), tale scelta non rappresenterebbe alcun sistema dinamico. Si può però introdurre in  $H(s)$  un polo stabile in  $-\frac{1}{\sigma}$  (si ricordi che  $\sigma$  è una costante di tempo) di modo da rendere  $H(s)$  una funzione di trasferimento ammissibile:  $H(s) = -\frac{G_d(s)}{G(s)} \frac{1}{1+\sigma s}$ . Quanto più il polo avrà modulo maggiore e tanto più rapidamente verrà “compensato” in uscita da  $H(s)$  il disturbo  $d$ .

```
sigma=0.01; H=-Gd/G*tf(1,[sigma 1]);
y_dy_c001=disturbo*step((G*H+Gd)/(1+L),T);
ytot_c001=y_wy+y_dy_c001;
errore_c001=w-ytot_c001;
```

```
sigma=0.1; H=-Gd/G*tf(1,[sigma 1]);
```

$$^7 F_{dy}(s) = \frac{G_d(s)}{1+L(s)} = \frac{G_d(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{sN_d(s)}{s(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)+k_i(1+\tau s)N(s)} = \frac{sN_d(s)}{s\frac{1}{\tau}(1+\tau s)(s-\lambda_2)+k_i(1+\tau s)N(s)} = \frac{1}{(1+\tau s)} \frac{sN_d(s)}{s\frac{1}{\tau}(s-\lambda_2)+k_iN(s)}$$

$$^8 F_{wy}(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{k_i(1+\tau s)N(s)}{s(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)+k_i(1+\tau s)N(s)} = \frac{s\frac{1}{\tau}(1+\tau s)(s-\lambda_2)+k_i(1+\tau s)N(s)}{s\frac{1}{\tau}(1+\tau s)(s-\lambda_2)+k_i(1+\tau s)N(s)} = \frac{s\frac{1}{\tau}(s-\lambda_2)+k_iN(s)}{s\frac{1}{\tau}(s-\lambda_2)+k_iN(s)}$$

<sup>9</sup>  $y^{TOT} = F_{wy}(s)w + F_{dy}(s)d$ .  $F_{wy}(s)$  ha grado relativo 2, mentre  $F_{dy}(s)$  ha grado relativo 1. Pertanto, nelle risposte a riferimento e disturbo costanti, la prima derivata non nulla di  $y^{TOT}$  è la prima ed essendo  $N_d(s) = -\frac{60k}{2\pi J L}(Ls + R)$  (tale risultato si ottiene con semplici calcoli di passaggio dal modello interno al modello esterno), questa è pari a  $-\frac{60k}{2\pi J}$ .

<sup>10</sup>  $\Delta t = 0.002$  permette di stimare il disturbo costante  $d$  con un errore circa pari al 10%

```

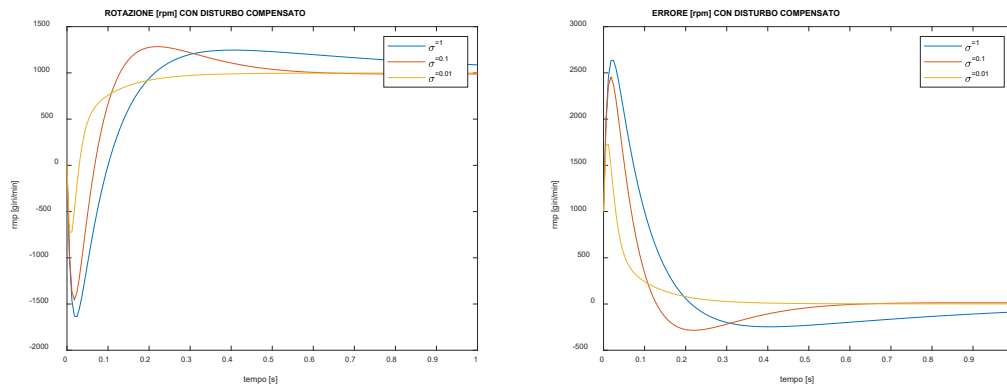
y_dy_c01=disturbo*step((G*H+Gd)/(1+L),T);
ytot_c01=y_wy+y_dy_c01;
errore_c01=w-ytot_c01;

sigma=1; H=-Gd/G*tf(1,[sigma 1]);
y_dy_c1=disturbo*step((G*H+Gd)/(1+L),T);
ytot_c1=y_wy+y_dy_c1;
errore_c1=w-ytot_c1;

figure(5);
plot(T,ytot_c1); hold on; plot(T,ytot_c01); plot(T,ytot_c001);
legend('\sigma=1','\sigma=0.1','\sigma=0.01'); title('ROTAZIONE [rpm] CON DISTURBO COMPENSATO'); xlim([0 1]);
xlabel('tempo [s]'); ylabel('rpm [giri/min]');

figure(6);
plot(T,errore_c1); hold on; plot(T,errore_c01); plot(T,errore_c001);
legend('\sigma=1','\sigma=0.1','\sigma=0.01'); title('ERRORE [rpm] CON DISTURBO COMPENSATO'); xlim([0 1]);
xlabel('tempo [s]'); ylabel('rpm [giri/min]');

```



Si noti come al diminuire di  $\sigma$  la velocità di rotazione dell'albero si porti (in presenza di disturbo) sempre più velocemente al valore di regime, riducendo sempre più la contro-rotazione dello stesso indotta dalla raffica di vento. Tuttavia, valori di  $\sigma$  inferiori a 0.1 non comportano miglioramento nei tempi di risposta del sistema. Ciò è dovuto al fatto che si era partiti da un sistema di controllo con costante di tempo dominante proprio in 0.1.

Per  $\sigma = 0.1$  il controllore  $C(s)$  e il compensatore  $H(s)$  sono pertanto dati da:

$C$

$C =$

$$\frac{0.007451 s + 0.01006}{s}$$

$H = -tf(NUMd, NUM(3)) * tf(1, [sigma 1])$

$H =$

$$\frac{2282 s + 146}{1.384e04 s + 1.384e05}$$