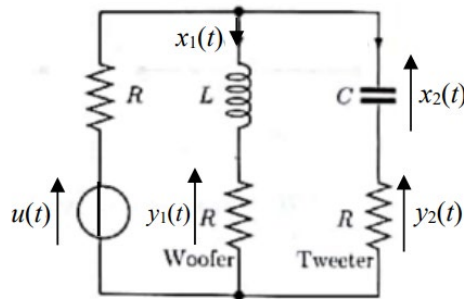


Progettazione di un sistema di riproduzione audio – Tracce per le soluzioni

Nel circuito elettrico in figura



indichiamo con $x_1(t)$ la corrente che attraversa l'induttore e con $x_2(t)$ la tensione ai capi del condensatore. Sia inoltre $u(t)$ la tensione applicata dal generatore di tensione ideale al circuito, mentre $y_1(t)$ e $y_2(t)$ le tensioni ai capi di woofer e tweeter, rispettivamente. Le equazioni di stato e uscita che descrivono il circuito elettrico sono¹:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{3R}{2L}x_1 + \frac{1}{2L}x_2 + \frac{1}{2L}u \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{2C}x_1 - \frac{1}{2RC}x_2 + \frac{1}{2RC}u \\ y_1 &= Rx_1 \\ y_2 &= -\frac{R}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}u\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} & \end{bmatrix} & b &= \begin{bmatrix} \end{bmatrix} \\ c_1 &= \begin{bmatrix} \end{bmatrix} & c_2 &= \begin{bmatrix} \end{bmatrix} \\ d_1 &= & d_2 &= \end{aligned}$$

Scriviamo il modello in Matlab

- Definiamo i parametri R , C e L ($R = 8\Omega$, $L = 0.75$ mH e $C = 3.76$ μ F)
- Definiamo il sistema (matrici A , b , c_1 , c_2 , d_1 , d_2)
- Definiamo come `woofer` il sistema in variabili di stato (comando `ss`) associato all'uscita y_1 (quindi al vettore c_1 e allo scalare d_1) (dovrà essere un filtro passa basso)

$$^1 \dot{x}_1 = \frac{1}{L}[u - R(x_1 + C\dot{x}_2) - Rx_1] \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}\left[\frac{Rx_1 + L\dot{x}_1 - x_2}{R}\right] \quad (2)$$

$$(1) + \frac{RC}{L} \cdot (2) \rightarrow \dot{x}_1 = -\frac{3R}{2L}x_1 + \frac{1}{2L}x_2 + \frac{1}{2L}u$$

$$\frac{L}{RC} \cdot (1) - (2) \rightarrow \dot{x}_2 = -\frac{1}{2C}x_1 - \frac{1}{2RC}x_2 + \frac{1}{2RC}u$$

$$y_1 = Rx_1$$

$$y_2 = Rx_1 + L\dot{x}_1 - x_2 = -\frac{R}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}u$$

- Definiamo come `tweeter` il sistema in variabili di stato (comando `ss`) associato all'uscita y_2 (quindi al vettore c_2 e allo scalare d_2) (dovrà essere un filtro passa alto)

Per verificare che la frequenza di crossover f_{cr} sia pari a quella richiesta, 0.5 kHz, simuliamo il sistema alimentando il circuito con un segnale sinusoidale in ingresso di frequenza pari a 1 kHz (alta frequenza)². In caso di buon funzionamento del sistema di riproduzione audio, tale segnale deve essere filtrato dal woofer e passare bene nel tweeter.

- Definiamo il periodo della sinusoide T
- Definiamo l'intervallo temporale
- Definiamo l'ingresso sinusoidale ($u(t) = \sin(\frac{2\pi}{T}t)$)
- Simuliamo il woofer (comando `lsim`) osservando in un grafico che il segnale in uscita dal woofer non viene filtrato
- Simuliamo il tweeter (comando `lsim`) osservando in un grafico che il segnale in uscita dal tweeter viene filtrato

Le simulazioni _____ mostrano quindi il risultato aspettato (è l'opposto!).

Si può anche ascoltare ciò che accade utilizzando il file sonoro `_f.m`

`sonoro_f(1000, R, L, C);`

(l'argomento, 1000, è la frequenza scelta per il segnale in ingresso)

Il primo suono è quello generato dal segnale di ingresso a 1 kHz, il secondo è il suono in uscita dal woofer, il terzo è quello in uscita dal tweeter.

Cosa si sente? _____

Se il dispositivo di riproduzione funzionasse correttamente il secondo segnale (uscita dal woofer) dovrebbe _____ rispetto al segnale di ingresso mentre il terzo (uscita dal tweeter) dovrebbe _____. Ma così non è, anzi è il contrario!

Mediante i diagrammi di Bode del modulo delle funzioni di trasferimento G_1 da u a y_1 (woofer) e G_2 da u a y_2 (tweeter) è possibile giustificare tali comportamenti.

Tracciamo i diagrammi con Matlab (comandi `ss2tf` per definire i sistemi tramite le funzioni di trasferimento G_1 e G_2 , e `bode` per tracciarne i diagrammi di bode).

I rami del circuito di woofer e di tweeter si comportano come filtri _____ e _____, rispettivamente.

L'estremo superiore della banda passante per il woofer e l'estremo inferiore della banda passante per il tweeter si trovano in prossimità della pulsazione naturale ω_n dei due poli complessi coniugati di G_1 e G_2

- Calcoliamo i poli come gli autovalori di A (comando `eig`)
- Calcoliamo $\omega_n = \sqrt{a^2 + b^2}$

² Se la frequenza delle oscillazioni è di 1 kHz = 1000 Hz, il periodo (inverso della frequenza) è pari a 0.001 s. Volendo visualizzare 10 oscillazioni, l'intervallo di tempo di simulazione è pari a 0.01 s.

(comando `abs` per determinare il modulo di autovalori complessi oppure `sqrt` per determinare la radice quadrata e `real` e `imag` per la parte reale e immaginaria di un numero complesso)

$$p_{1,2} = a \pm ib \rightarrow (s - p_1)(s - p_2) = s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1 p_2 = s^2 - 2as + (a^2 + b^2) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

$$\rightarrow \omega_n = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Pertanto, la banda passante del woofer è $\omega < \underline{\hspace{2cm}}$ rad/s mentre quella del tweeter è $\omega > \underline{\hspace{2cm}}$ rad/s.

Ciò giustifica quanto abbiamo trovato: un segnale sinusoidale in ingresso di frequenza pari a 1 kHz (circa 6280 rad/sec) passa bene nel woofer e viene filtrato dal tweeter.

Approssimando la pulsazione di crossing ω_{cr} con al pulsazione naturale ω_n , la frequenza di crossing per il dispositivo assegnato è circa pari a $f_{cr} = \frac{\omega_{cr}}{2\pi} \sim \underline{\hspace{2cm}}$ kHz; il sistema di riproduzione audio non soddisfa la specifica di progetto richiesta ($f_{cr} = 0.5$ kHz).

Nel progettare un sistema di riproduzione che ponga la frequenza di crossing f_{cr} in 0.5 kHz, si può, ad esempio, lasciare R pari al valore 8Ω e scegliere L e C facendo in modo che i due poli (gli autovalori di A) siano reali coincidenti in $\omega_{cr} = 2\pi f_{cr} = 2\pi \cdot \underline{\hspace{2cm}} \sim \underline{\hspace{2cm}}$ rad/s. In tal modo i diagrammi di Bode del woofer e del tweeter subiranno un cambio di pendenza massimo di -40 dB/dec per il woofer e di $+40$ dB/dec per il tweeter proprio in ω_{cr} così che la banda passante sarà, rispettivamente, circa pari a $(0, \omega_{cr})$ e $(\omega_{cr}, +\infty)$.

La matrice $A = \begin{bmatrix} -\frac{3R}{2L} & \frac{1}{2L} \\ -\frac{1}{2C} & -\frac{1}{2RC} \end{bmatrix}$ ha

$$tr(A) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$det(A) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Volendo porre $p_1 = p_2 = -\omega_{cr}$, si ottiene

$$tr(A) = \underline{\hspace{2cm}} = p_1 + p_2 = -2\omega_{cr}$$

$$det(A) = \underline{\hspace{2cm}} = p_1 p_2 = \omega_{cr}^2$$

$$C = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$L = \underline{\hspace{2cm}}$$

(soluzione: una possibile scelta è $C = \frac{1}{R\omega_{cr}}$ e $L = R^2 C$)

Verifichiamo con Matlab che ora tutto funzioni:

- Definiamo f_{cr} e ω_{cr}
- Definiamo C e L
- Definiamo le nuove matrici A e b , il sistema woofer e il sistema tweeter
- Simuliamo i due sistemi con l'ingresso a 1 kHz, verificando che tale ingresso viene filtrato dal woofer e passa attraverso il tweeter

- Proviamo il risultato anche con il sonoro
- I diagrammi di Bode di woofer e tweeter confermano la bontà del progetto
($f_{cr} = 500 \text{ Hz} \rightarrow \omega_{cr} = 3.14 \cdot 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$)