

Modello demografico di Leslie

Popolazione suddivisa in classi di età $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$

$x_i(t)$ = # di individui di età i all'inizio dell'anno t

- Sopravvivenza e invecchiamento

$$x_{i+1}(t+1) = S_i x_i(t) \quad i=1, 2, \dots, n-1$$

S_i = sopravvivenza da età i a età $i+1$

- riproduzione

$$x_1(t+1) = s_0 f_1 x_1(t) + s_0 f_2 x_2(t) + \dots + s_0 f_n x_n(t)$$

s_0 = sopravvivenza da età 0 a età 1

f_i = fertilità di età i $i=1, 2, \dots, n$

(# di individui generati da ogni individuo della classe i)

$$\Rightarrow x_1(t+1) = s_0 f_1 x_1(t) + s_0 f_2 x_2(t) + \dots + s_0 f_n x_n(t)$$

$$x_2(t+1) = S_1 x_1(t)$$

$$x_3(t+1) = S_2 x_2(t)$$

\vdots

$$x_n(t+1) = S_{n-1} x_{n-1}(t)$$

$$x(t+1) = A x(t) \quad \text{con} \quad A = \begin{vmatrix} s_0 f_1 & s_0 f_2 & \dots & s_0 f_n \\ S_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & S_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

con immigrazione

$$x(t+1) = A x(t) + b(t)$$

$$b = \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{vmatrix} \rightarrow \% \text{ immigrati } \forall \text{ classe di età}$$

Esempio 2 classi di età

Processionaria del pino

larve
adulti

$x_1(t)$ non fertili $f_1 = 0$

$x_2(t)$ fertili $f_2 \neq 0$

s_0 = sopravvivenza uova s_1 : larve $\xrightarrow{s_1}$ adulti

$$x_1(t+1) = s_0 f_1 x_1(t) + s_0 f_2 x_2(t)$$

$$x_2(t+1) = s_1 x_1(t)$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & s_0 f_2 \\ s_1 & 0 \end{vmatrix}$$

Equilibrio $\bar{x} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

Stabilità $\text{tr}(A) = 0$

$$\det(A) = -s_0 s_1 f_2$$

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - s_0 s_1 f_2$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{s_0 s_1 f_2}$$

• $s_0 s_1 f_2 < 1 \Rightarrow \text{A.S.} \Rightarrow x(t) \rightarrow \bar{x} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ la popolazione si estingue \otimes
 $|\lambda_i| < 1$

• $s_0 s_1 f_2 > 1 \Rightarrow \text{I.} \Rightarrow x(t) \rightarrow \infty$ esplosione demografica degli insetti
 $|\lambda_i| > 1$

\otimes Politiche di controllo

f_2 piccolo \rightarrow trappole a feromoni

s_0 piccolo \rightarrow controllo biologico con predazione delle uova

s_1 piccolo \rightarrow distruzione meccanica dei nidi in cui vivono le larve

In generale si può dimostrare che

$$\text{A.S.} \Leftrightarrow R = s_0 f_1 + s_0 s_1 f_2 + s_0 s_1 s_2 f_3 + \dots + (s_0 s_1 \dots s_{n-1}) f_n < 1$$

tasso finito di crescita

numero medio di individui generati da ogni individuo nella propria vita

NOTA Il processo produttivo senza riciclo è un Leslie senza riproduzione!
(la prima riga si annulla in Leslie e $\lambda_i = 0 \neq 1 \rightarrow$ memoria finita)