1

Gli abitanti del paese di Bikeland sono suddivisi in tre categorie. In particolare, ogni individuo o possiede un'automobile, o possiede una bicicletta, oppure non possiede nessuno dei due mezzi (decidendo così di spostarsi senza mezzo proprio). Alla fine di ogni anno, il 10% di individui che non possiede né l'auto né la bicicletta decide di acquistare un'auto, mentre il 20% decide di acquistare una bicicletta. Inoltre, tra coloro che possiedono l'auto, la frazione α decide di venderla per acquistare una bicicletta, mentre il 30% decide di rimanere senza mezzo proprio. Infine, il 10% di coloro che hanno una bicicletta decide di venderla per acquistare un'auto.
Ogni anno, il 10% di ogni categoria lascia il paese e i nuovi abitanti $u(t)$ arrivano ciascuno con la propria auto.

a) Indicando con $y(t)$ il numero di individui che si muovono con mezzo proprio, descrivere Bikeland mediante un sistema dinamico specificando chiaramente le variabili di stato scelte e le matrici (A, b, c, d) così ottenute.

b) Studiare la stabilità del sistema al variare del parametro α.

Sia ora $\alpha = 0.25$.

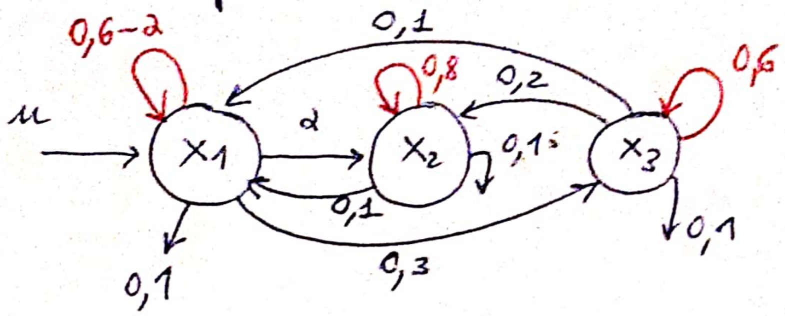
c) Supponendo che ogni anno in paese vi sia un numero costante di nuovi abitanti, determinare a regime (cioè all'equilibrio) la percentuale di individui che possiede un'auto e la percentuale di individui che possiede una bicicletta.

Si supponga ora che l'amministrazione comunale del paese fornisca degli incentivi economici all'acquisto della bicicletta conseguente alla vendita di un'auto. In particolare, si supponga che la propensione a tale passaggio diventi pari a $\alpha = 0.25 + 0.35\Sigma$ dove Σ indica l'incentivo (in K€) fornito a ogni individuo che possiede l'auto e che passerà alla bicicletta. (NOTA: in assenza di incentivo, $\Sigma = 0$, la propensione α rimane pari a 0.25; l'incentivo massimo, Σ pari a 1 K€, porterebbe la propensione α al suo valore massimo).

d) Determinare, se esiste, l'entità dell'incentivo Σ da proporre ai possessori di auto in modo da garantire nel paese di Bikeland una percentuale di biciclette pari al 60%.

e) Quanto tempo sarà necessario per arrivare a tale condizione?

a) $x_1(t) = \#$ persone con auto
$x_2(t) = \#$ persone con bici
$x_3(t) = \#$ persone senza auto né bici.



NOTA $0 \leq \alpha \leq 0{,}6$ *

$$x_1(t+1) = (0{,}6-\alpha)\,x_1(t) + 0{,}1\,x_2(t) + 0{,}1\,x_3(t) + u(t)$$
$$x_2(t+1) = \alpha\, x_1(t) + 0{,}8\,x_2(t) + 0{,}2\,x_3(t)$$
$$x_3(t+1) = 0{,}3\,x_1(t) + 0{,}6\,x_3(t)$$
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$A = \begin{vmatrix} 0{,}6-\alpha & 0{,}1 & 0{,}1 \\ \alpha & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = b$$

$$c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad d = 0$$

b) $a_{ij} \geq 0^* \ \forall i,j \rightarrow$ il sistema è positivo

$$\begin{array}{ccc} \left| \begin{array}{ccc} 0{,}6-\alpha & 0{,}1 & 0{,}1 \\ \alpha & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}6 \end{array} \right| \\ 0{,}9 \quad\quad 0{,}9 \quad\quad 0{,}9 \end{array} \longrightarrow 0{,}9 \leq \lambda_D \leq 0{,}9 \Rightarrow \lambda_D = 0{,}9 \quad \text{A.S.} \ \forall \alpha$$

c) $u(t) = \bar{u}$

$$x_1 = (0{,}6-\alpha)\,x_1 + 0{,}1\,x_2 + 0{,}1\,x_3 + u \qquad (1)$$
$$x_2 = \alpha\, x_1 + 0{,}8\,x_2 + 0{,}2\,x_3 \qquad (2)$$
$$x_3 = 0{,}3\,x_1 + 0{,}6\,x_3 \qquad (3)$$

$$(3) \rightarrow 0{,}4\,x_3 = 0{,}3\,x_1 \rightarrow x_3 = \frac{3}{4}x_1$$ (4)

$$(2) \rightarrow 0{,}2\,x_2 = \frac{1}{4}x_1 + 0{,}2\cdot\frac{3}{4}x_1 \rightarrow x_2 = 2x_1$$

$\alpha = \frac{1}{4}$

$$(1) \rightarrow x_1 - 0{,}6\,x_1 + \frac{1}{4}x_1 - 0{,}1\cdot 2x_1 - 0{,}1\cdot\frac{3}{4}x_1 = u$$

$$\frac{1{,}5}{4}x_1 = u \qquad x_1 = \frac{4}{1{,}5}u \Rightarrow \bar{x}_1 = \frac{8}{3}\bar{u}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{16}{3}\bar{u}$$

$$\bar{x}_3 = 2\bar{u}$$

$$\bar{N} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 = 10\,\bar{u}$$

$$\%_{AUTO} = \frac{\bar{x}_1\cdot 100}{\bar{N}} = \frac{4}{15}\cdot 100 \simeq 26{,}7\,\%$$

$$\%_{BICI} = \frac{\bar{x}_2\cdot 100}{\bar{N}} = \frac{8}{15}\cdot 100 \simeq 53{,}3\,\%$$

d) $(1)+(2)+(3) \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0{,}6\,x_1 \cancel{-2x_1} + 0{,}1\,x_2 + 0{,}1\,x_3 + u +$
$+ \cancel{2x_1} + 0{,}8\,x_2 + 0{,}2\,x_3 +$
$+ 0{,}3\,x_1 + 0{,}6\,x_3$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0{,}9\,x_1 + 0{,}9\,x_2 + 0{,}9\,x_3 + u$$
$$= 0{,}9\,(x_1 + x_2 + x_3) + u$$

$$0{,}1\,(x_1 + x_2 + x_3) = u$$
$$0{,}1\,N = u \Rightarrow \bar{N} = 10\,\bar{u} \quad \forall \alpha$$

$$\%\,BICI = 60\,\% \Rightarrow \bar{x}_2 = 6\,\bar{u}$$
$$\bar{x}_1 + \bar{x}_3 = 4\,\bar{u}$$

$x_1 + x_3 = 4u$

(4) $x_3 = \frac{3}{4}x_1$ $\rightarrow x_1 + \frac{3}{4}x_1 = 4u$ → $\bar{x}_1 = \frac{16}{7}\bar{u}$, $\bar{x}_3 = \frac{12}{7}\bar{u}$

Scansionato con CamScanner

(2) $\rightarrow 0{,}2\, x_2 = \alpha x_1 + 0{,}2\, x_3$ (.5

$x_2 = 5\alpha x_1 + x_3$

$6\cancel{u} = 5\alpha \frac{16}{7}\cancel{u} + \frac{12}{7}\cancel{u}$

$42 = 80\alpha + 12 \rightarrow \alpha = 3/8 = 0{,}375$

$\alpha = 0{,}35\,\zeta + 0{,}25 = 0{,}375 \Rightarrow \zeta = \frac{0{,}125}{0{,}35} = 0{,}3571\ k€ \cong 357\ €$

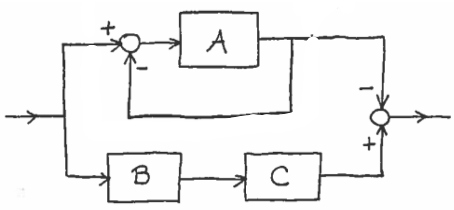
e) $\lambda_D = 0{,}9 \quad \forall\alpha$

$T_D = -\frac{1}{\ln \lambda_D}$

$T_R = -\ 5T_D \simeq 47{,}5$ anni!

2

Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura.



Il blocco A contiene un integratore mentre il blocco B è descritto dal modello ingresso/uscita

$$\ddot{y}_B + \dot{y}_B + 12y_B = -4\dot{u}_B - 6u_B$$

Il blocco C è descritto dal modello di stato

$$A_C = \left| \begin{matrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p & -1 \\ 0 & 0 & 1 & p \end{matrix} \right| \quad b_C = \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right| \quad c_C = | \, 0 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \, | \quad d_C = 0$$

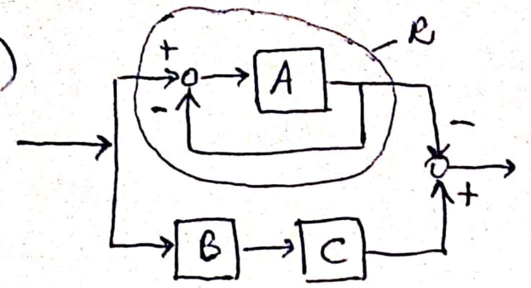
a) Studiare la stabilità (asintotica, semplice e instabile) del sistema aggregato al variare di p $(-\infty \leq p \leq +\infty)$, discutendo anche l'eventuale esistenza di oscillazioni nelle risposte a ingresso costante.

b) Per i valori di p per cui il sistema è asintoticamente stabile, determinare tutte le costanti di tempo e il tempo di risposta.

c) Come cambierebbe la stabilità dell'aggregato qualora il blocco B fosse descritto dal modello ingresso/uscita

$$\dddot{y}_B + \ddot{y}_B + \dot{y}_B + 12y_B = -4\dot{u}_B - 6u_B$$

a)



$\Sigma = R // (B \cdot C)$ è AS $\Leftrightarrow$ R, B e C sono AS

$G_A = \frac{1}{s}$ $\quad G_R = \frac{G_A}{1+G_A} = \frac{1}{1+s}$ $\quad \lambda = -1 \rightarrow R$ è A.S.

$G_B = \frac{-4s-6}{s^2+s+12}$

$\hookrightarrow \alpha_1, \alpha_2 > 0$

tr<0 $\quad$ det>0 $\quad \Rightarrow B$ è A.S.

$\lambda^2 + \lambda + 12 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-48}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{47}}{2}$

$$A_C = \left|\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & p & -1 \\ 0 & 0 & 1 & p \end{array}\right|$$

$\hookrightarrow tr = 2p$

$det = p^2+1 > 0$

$\rightarrow \lambda^2 - 2p\lambda + p^2+1 = 0$

$\lambda_{1,2} = p \pm i$

e $\{\lambda\}_C = \{-1, -2, p+i, p-i\}$

NOTA R e B sono A.S. $\Rightarrow$ la stabilità di Σ dipende dalla stabilità di C

$p<0 \quad$ C è A.S $\Rightarrow \Sigma$ è A.S.

$p>0 \quad$ C è INST $\Rightarrow \Sigma$ è INST

$p=0 \quad$ C è S.S $\Rightarrow \Sigma$ è S.S

$\downarrow$

$\{\lambda\}_C = \{-1, -2, +i, -i\}$

$\{\lambda\} = \{\lambda\}_R \cup \{\lambda\}_B \cup \{\lambda\}_C = \left\{-1, \frac{-1+i\sqrt{47}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{47}}{2}, -1, -2, p+i, p-i\right\}$

$\exists\, \lambda_i \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists$ oo oscillazioni

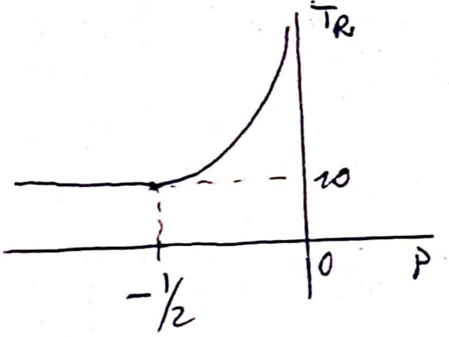
b) $p<0$ $\quad T_i = -\frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda_i)}$

$\{T_i\} = \{1, 2, 2, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{p}, -\frac{1}{p}\}$

$T_D = \max_i \{T_i\}$

se $\begin{cases} -\frac{1}{p} \geq 2 \\ p<0 \end{cases} \rightarrow -\frac{1}{2} \leq p < 0 \Rightarrow T_D = -\frac{1}{p}$ e $T_R = -\frac{5}{p}$

se $p < -\frac{1}{2} \Rightarrow T_D = 2$ e $T_R = 10$



c) $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 12 = 0$

$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1 \quad \alpha_3 = 12$

$\alpha_i > 0 \ \forall i$

$\alpha_1 \alpha_2 = 1 \not> \alpha_3 = 12$ $\xrightarrow[n=3]{\text{HURWITZ}}$ B non è AS

$\Downarrow$

Σ non è A.S.

- $\lambda = 0$ non è soluzione $0^3 + 0^2 + 0 + 12 \neq 0$
- $\lambda = i\omega$ non è soluzione

$(i\omega)^3 + (i\omega)^2 + (i\omega) + 12 = 0$

$-i\omega^3 - \omega^2 + i\omega + 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} \omega(1-\omega^2) = 0 \\ 12 - \omega^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega = \pm 1 \\ \omega = \pm\sqrt{12} \end{cases}$

Quindi B è INST con come Σ $\forall p$

3

Sia data l'equazione non lineare

$$\dot{x} = -px + (-2x^3+3x^2-x) \qquad p \geq 0$$

a) Discutere, per tutti i $p \geqslant 0$, la stabilità degli stati di equilibrio mediante il metodo della linearizzazione.

b) Discutere, per tutti i $p \geqslant 0$, la stabilità degli stati di equilibrio mediante un metodo grafico.

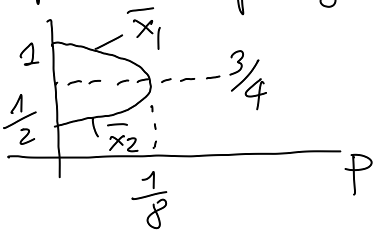
c) Rappresentare gli equilibri del sistema e la loro stabilità nel piano (p, x). Nello stesso piano, tracciare le traiettorie del sistema corrispondenti ai seguenti valori di p: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, deducendo così la stabilità dell'equilibrio per $p = 1/8$

---

a) Equilibri: $\dot{x} = 0$

$$\dot{x} = -px + (-2x^3+3x^2-x) = x\underbrace{\left[-p-2x^2+3x-1\right]}_{F} = x\left[-(2x^2-3x+1+p)\right]$$

$$\bar{x}_0 = 0 \qquad \bar{x}_{1,2} = \frac{+3 \pm \sqrt{9-8(1+p)}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{1-8p}}{4} \qquad 1-8p \geq 0 \rightarrow p \leq \frac{1}{8}$$



$$0 \leq p \leq \frac{1}{8} \qquad \frac{3}{4} \leq \bar{x}_1 \leq 1 \qquad \frac{1}{2} \leq \bar{x}_2 \leq 3/4$$

$$p = \frac{1}{8} \rightarrow \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 3/4$$

$$\dot{x} = f = xF$$

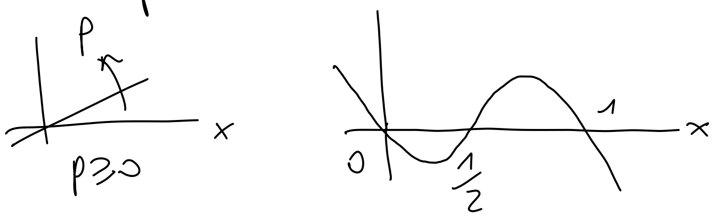
$$J = \frac{\partial f}{\partial x} = F + x\frac{\partial F}{\partial x} \qquad \text{NOTA} \quad F\big|_{\bar{x}_1} = F\big|_{\bar{x}_2} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = -4x+3$$

$$J_{\bar{x}_0} = F(0) = -p-1 < 0 \quad \forall p \geq 0 \Rightarrow \bar{x}_0 \text{ è A.S } \forall p$$

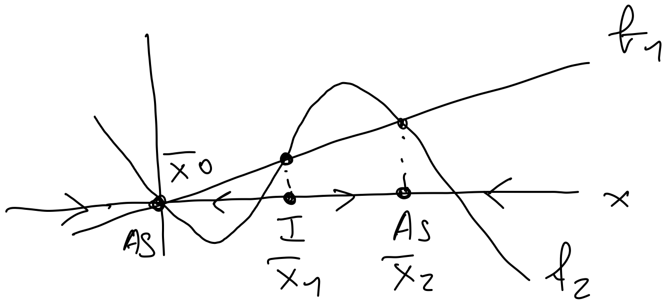
$$J_{\bar{x}_1} = \bar{x}_1(-4\bar{x}_1+3) \begin{cases} = 0 & \text{se } p = \frac{1}{8} \quad \bar{x}_1 = 3/4 \quad ?? \\ < 0 & \text{se } p < \frac{1}{8} \quad \bar{x}_1 > 3/4 \quad \text{AS} \end{cases}$$

$$J_{\bar{x}_2} = \bar{x}_2(-4\bar{x}_2+3) \begin{cases} = 0 & \text{se } p = \frac{1}{8} \quad \bar{x}_2 = 3/4 \quad ?? \\ > 0 & \text{se } p < \frac{1}{8} \quad \bar{x}_2 < 3/4 \quad \text{INST} \end{cases}$$

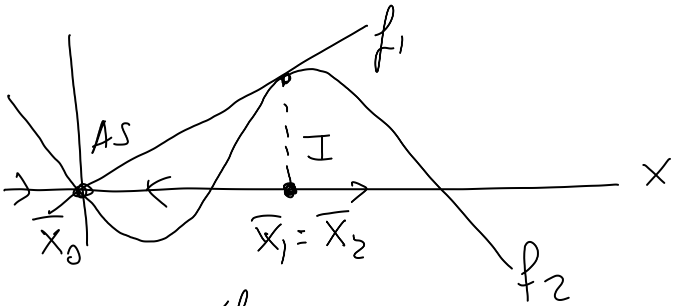
b) $\dot{x} = 0 \qquad \underbrace{px}_{f_1} = \underbrace{-2x^3 + 3x^2 - x}_{f_2} \qquad \dot{x} = -f_1 + f_2$



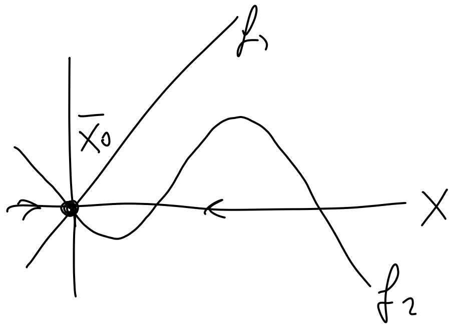
$0 \le p < \frac{1}{8}$



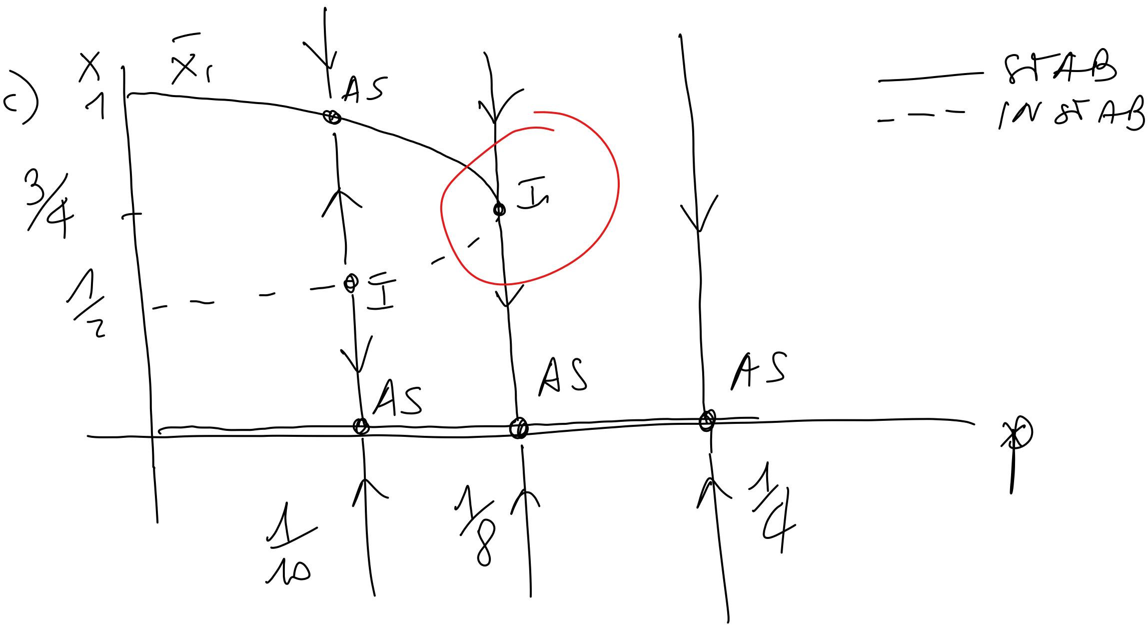
$p = \frac{1}{8}$



$p > \frac{1}{8}$



c)



4 Sia dato il sistema lineare

$$x_1(t+1) = 2x_1(t) + u(t)$$
$$x_2(t+1) = -x_1(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

a) studiarne la stabilità, la raggiungibilità e la osservabilità

Mediante un regolatore lineare (k, l)

b) verificare se è possibile ricostruire lo stato in tempo finito e, in caso affermativo, determinare l

c) verificare se è possibile controllare asintoticamente il sistema garantendo un tempo di risposta del sistema regolato pari a 5.

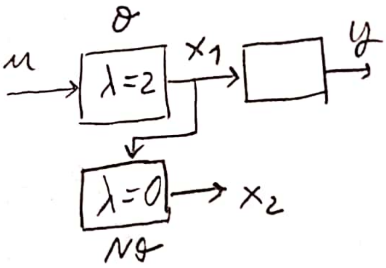
---

a) $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ $\quad \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 0$

$\hookrightarrow |\lambda_1| > 1 \Rightarrow$ INST

$b = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad R = \begin{vmatrix} b & Ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ $\quad \det(R) \neq 0 \rightarrow$ CR

$c = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \mathcal{O} = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ $\quad \det(\mathcal{O}) = 0 \rightarrow$ NON CO

b) 

l cambia λ_O

poichè $\lambda_{NO} = 0$, basterà porre $\lambda_O = 0$ per ricostruire lo stato in tempo finito

$$A + lc = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 + l_1 & 0 \\ -1 + l_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$2 + l_1 = 0 \rightarrow l_1 = -2 \qquad l = \begin{vmatrix} -2 \\ l_2 \end{vmatrix}$

Scansionato con CamScanner

c) $T_R^{A+lc} = 2$ con $l = \begin{vmatrix} -2 \\ l_2 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow$ occorre porre $T_R^{A+bk} = 5 \longrightarrow T_D^{A+bk} = 1 = -\dfrac{1}{\ln|\lambda_D|^{A+bk}}$

$A+bk \longrightarrow \lambda_1^* = \lambda_2^* = \dfrac{1}{e}$ $\rightsquigarrow$ si può fare essendo il sistema CR

$$A+bk = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+k_1 & k_2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$tr(A+bk) = \lambda_1^* + \lambda_2^*$

$det(A+bk) = \lambda_1^* \lambda_2^*$

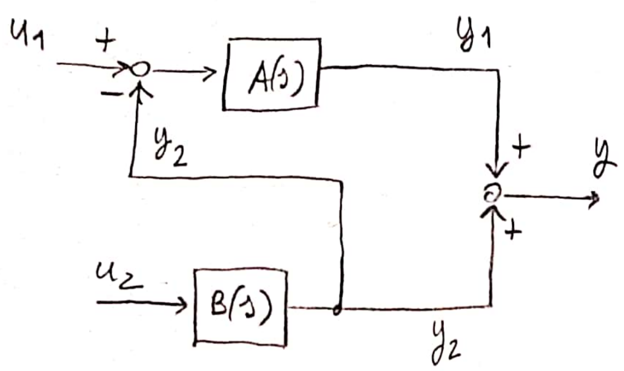
$\downarrow$

$2 + k_1 = \dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{e} \longrightarrow k_1 = \dfrac{2}{e} - 2$

$k_2 = \dfrac{1}{e^2}$ $\Longrightarrow k = \begin{vmatrix} \dfrac{2}{e} - 2 & \dfrac{1}{e^2} \end{vmatrix}$

5

Sia dato il sistema in figura



$$A(s) = \frac{2s+1}{(s+1)^2}$$

$B(s) =$ integratore

$$\Downarrow$$

$$B(s) = \frac{1}{s}$$

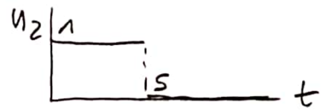
a) Determinare le funzioni di trasferimento da u_1 a y e da u_2 a y

b) Determinare qualitativamente e tracciare graficamente l'uscita del sistema quando

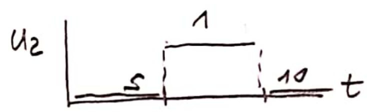
b1)

$u_2 = 0$

b2) $u_1 = 0$



b3)



a)

$$y = y_1 + y_2 = A(u_1 - y_2) + B u_2 = A(u_1 - B u_2) + B u_2$$

$$y = A u_1 + B(1-A) u_2$$

$u_1 \to y \qquad G_1 = A$

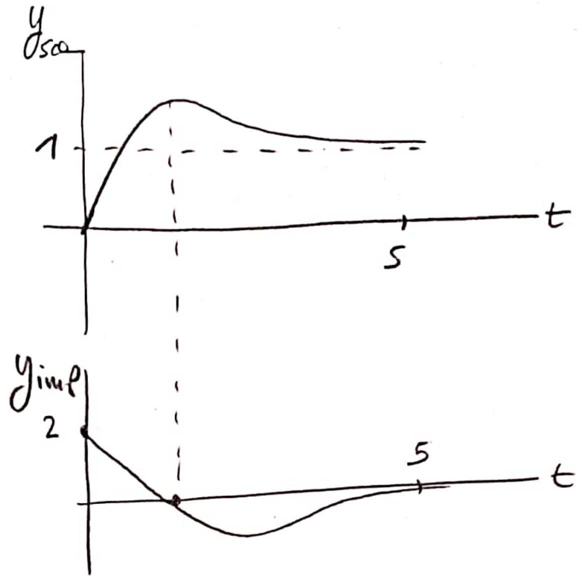
$u_2 \to y \qquad G_2 = B(1-A)$

$$G_1 = \frac{2s+1}{(s+1)^2}$$

$$G_2 = \frac{1}{s}\left(1 - \frac{2s+1}{(s+1)^2}\right) = \frac{1}{s} \, \frac{s^2 + \cancel{2s} + \cancel{1} - \cancel{2s} - \cancel{1}}{(s+1)^2} = \frac{s}{(s+1)^2}$$

b1) Ricordo $y^1_{imp} = \frac{d y^1_{sca}}{dt}$ $y = y_1$

$G_1 = \frac{2s+1}{(s+1)^2}$



$p_1 = p_2 = -1$

$\hookrightarrow T_R = 5$

no oscill

$y^\infty_{sca} = G_1(0) = 1$

$r = 1$ $y^1_{sca}(0) = 0$ $\dot{y}^1_{sca}(0) = 2$

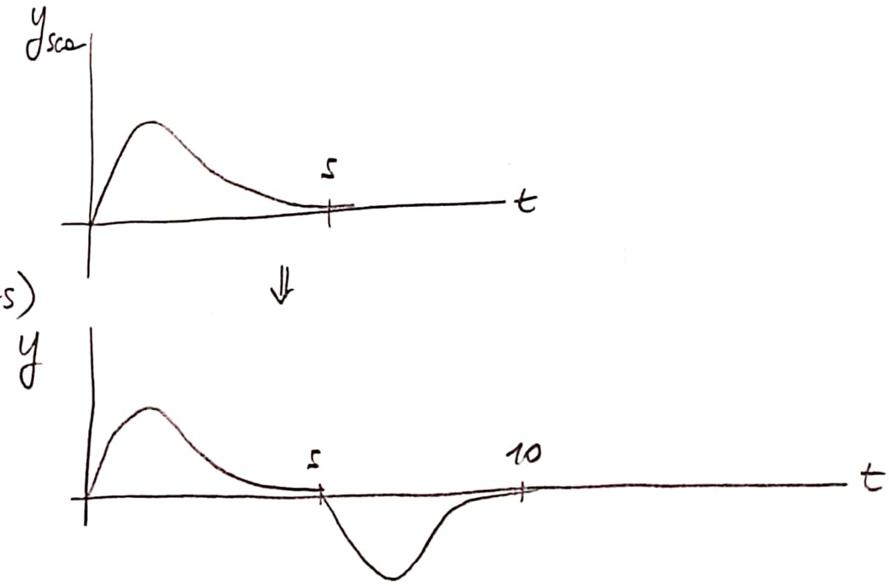
zero in $-\frac{1}{2}$ $\rightsquigarrow$ $m_s = 1$ $\delta = 0$ $N = 1$

b2) $G_2 = \frac{s}{(s+1)^2}$

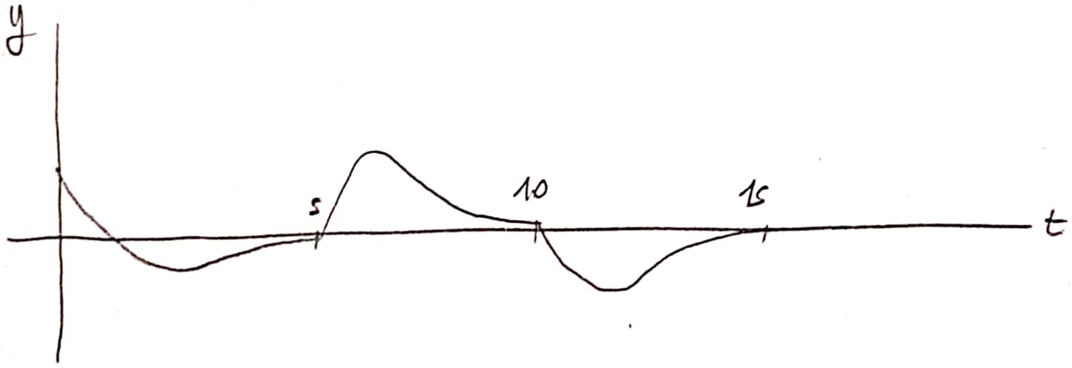
$G_2(0) = 0$

$m_s = 1$ $\delta = 0$ $N = 1$

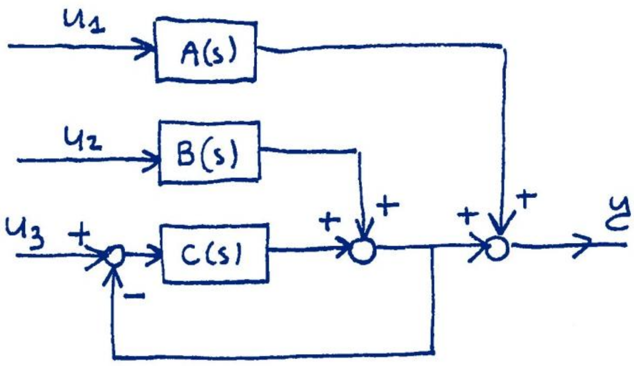
$u = sca(t) - sca(t-5)$



b3)



6 Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura:



in cui $A(s) = s(s-1)/(s+1)^3$, $B(s) = 2/(s^2+2s+2)$, $C(s) = (4s+7)/(s+1)^2$.

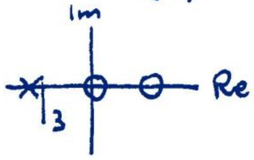
a) Determinare la funzione di trasferimento tra ciascun ingresso e l'uscita e discuterne la stabilità.
b) Determinare qualitativamente l'uscita $y(t)$ quando ai tre ingressi u_1, u_2, u_3 viene applicato uno scalino unitario agli istanti, rispettivamente, 0, 5, 10.
c) Determinare qualitativamente l'uscita $y(t)$ quando ai tre ingressi u_1, u_2, u_3 viene applicato un impulso unitario agli istanti, rispettivamente, 0, 5, 10.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) $y = Au_1 + Bu_2 + C\left(u_3 - [y - Au_1]\right)$, da cui

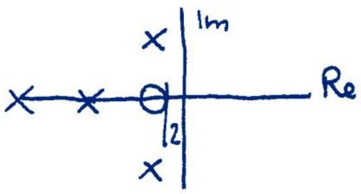
$$y = Au_1 + \underbrace{\frac{B}{1+C}}_{F(s)} u_2 + \underbrace{\frac{C}{1+C}}_{G(s)} u_3$$

$$A(s) = \frac{s(s-1)}{(s+1)^3}$$



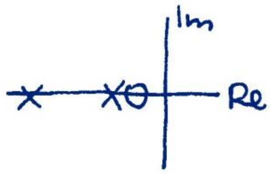
Re(poli) < 0 $\forall i$
$\Rightarrow$ asint. stabile

$$F(s) = \frac{2}{s^2+2s+2} \cdot \frac{1}{1+\frac{4s+7}{(s+1)^2}} = \frac{2(s+1)^2}{(s+1-i)(s+1+i)(s+2)(s+4)}$$



Re(poli) < 0 $\forall i$
$\Rightarrow$ asint. stabile

$$G(s) = \frac{\frac{4s+7}{(s+1)^2}}{1+\frac{4s+7}{(s+1)^2}} = \frac{4s+7}{(s+2)(s+4)}$$

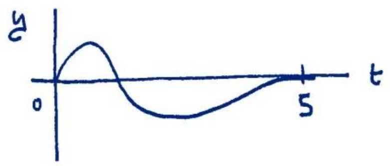


Re(poli) < 0 $\forall i$
$\Rightarrow$ asint. stabile

b) $A(s)$: $y(\infty) = A(0) = 0$

$r = 1$: $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1 > 0$, $T_R \simeq 5$

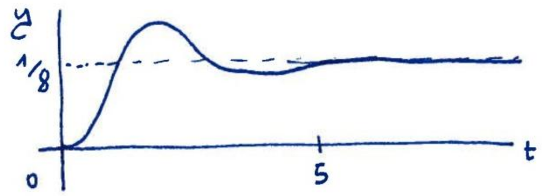
estremi : $m_s = 2$, $N = 2$



$F(s)$: $y(\infty) = F(0) = 1/8$

$r = 2$: $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, $\ddot{y}(0) = 2 > 0$, $T_R \simeq 5$

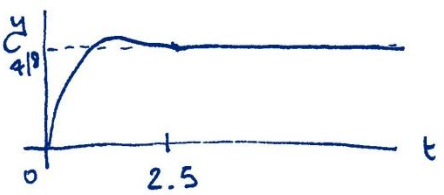
oscillazioni: $\tau = \frac{2\pi}{1}$



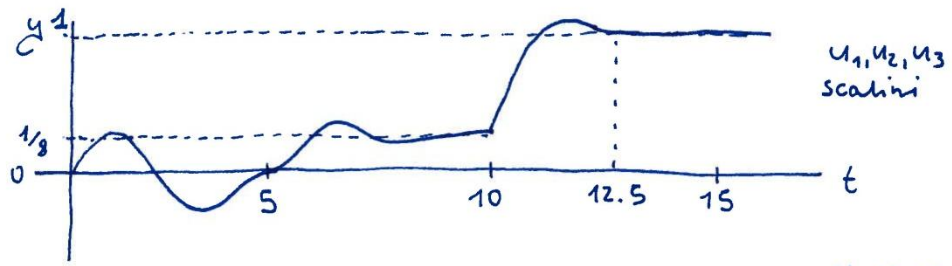
$G(s)$: $y(\infty) = G(0) = 7/8$

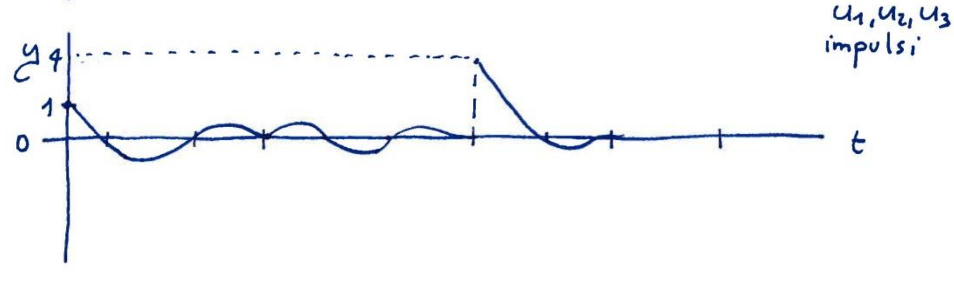
$r = 1$: $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 4 > 0$, $T_R \simeq 5/2$

estremi : $m_s = 1$, $N = 1$



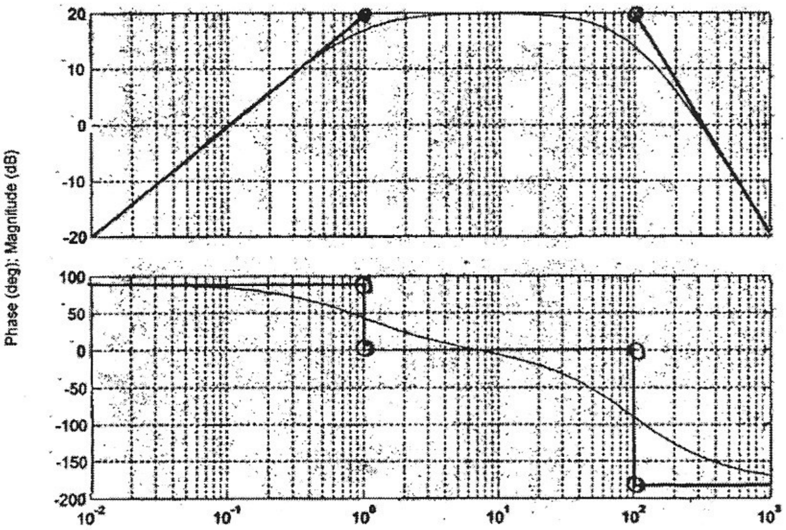
Complessivamente (ricordando che la risposta all'impulso è ottenibile graficamente come derivata della risposta allo scalino) :





7

Mediante una serie di esperimenti su un sistema, si sono ricavati i diagrammi di Bode (modulo e fase) riportati in figura.



a) Determinare la funzione di trasferimento del sistema.
b) Determinare e rappresentare graficamente la risposta allo scalino.
b) Calcolare l'uscita a transitorio esaurito quando

$$u(t) = -5\mathrm{sca}(t) + 10\sin(10t)$$

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $G(s) = 10s \dfrac{1}{(1+s)(1+0.01s)^2}$, sistema ESTERNAMENTE STABILE

b) $G(0) = 0 \Rightarrow y(t) \to 0$ per $t \to \infty$

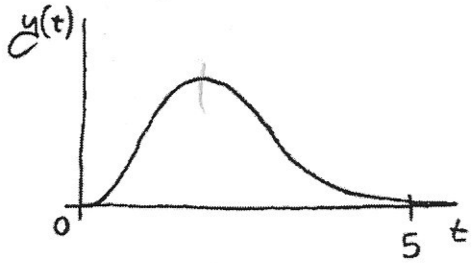
grado relativo $r = 2 \Rightarrow y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 0,\ \ddot{y}(0) = \dfrac{10}{10^{-4}} > 0$

Non vi sono oscillazioni.

$T_d = 1 \Rightarrow T_R \simeq 5$

$m_s = 1 \quad \delta = 0$

$N = 1$



c) $u_1(t) = -5\,\mathrm{sca}(t)$

$u_2(t) = 10 \sin(10t)$

A transitorio esaurito:

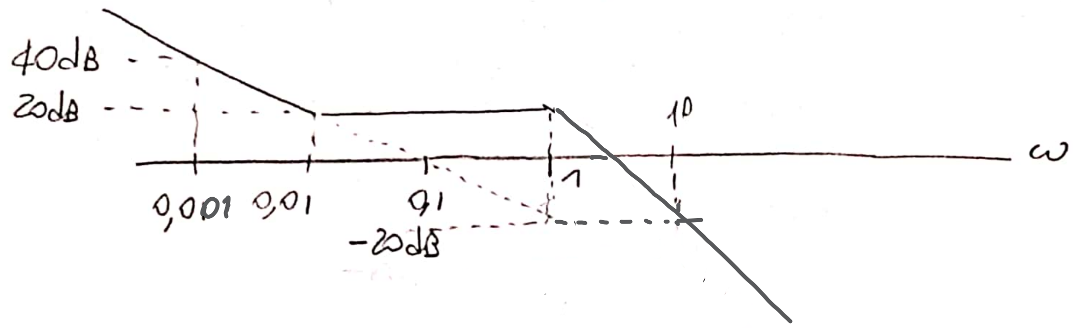
$y_1(t) = G(0) \cdot (-5) = 0$

dai diagr. di Bode

$y_2(t) = |G(i10)|\, 10 \sin(10t + \measuredangle G(i10)) \simeq 10 \cdot 10 \sin(10t + 0)$

$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$

8 Il diagramma di Bode approssimato del modulo della funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema lineare è riportato in figura

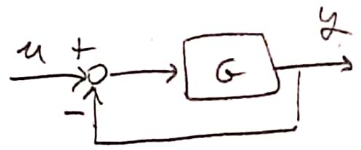


E' inoltre noto che il diagramma della fase tende a -2π per $\omega \to \infty$.

a) Determinare una possibile $G(s)$.

b) Tracciare la risposta a impulso unitario

c) Studiare la stabilità del sistema



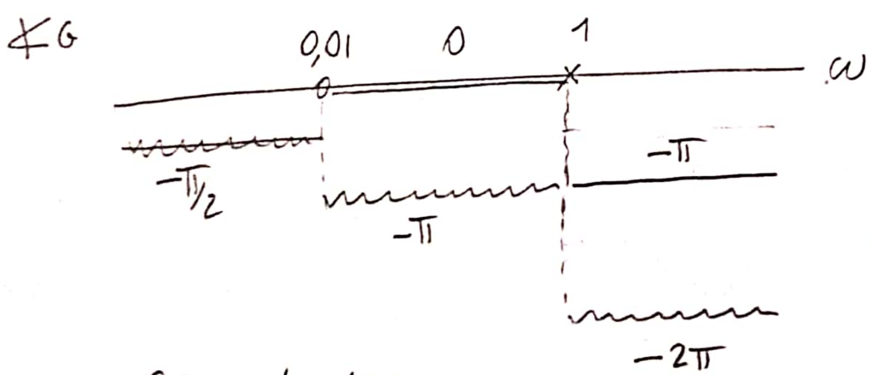
a) $|\mu|_{dB} = -20dB$ $\quad |\mu| = 0{,}1$ $\quad \mu = \pm 0{,}1$ $\quad$ Provo con $\mu = +0{,}1$

$$G = \frac{0{,}1}{s}\,\frac{1 \pm 100s}{(1+s)^2}$$

— zero stabile

〰 zero instabile

$\measuredangle G$

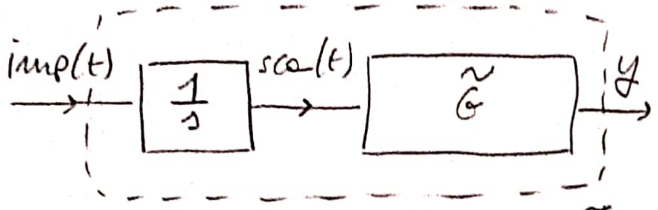


⇒ zero instabile

$$G = \frac{0{,}1}{s}\,\frac{1-100s}{(1+s)^2}$$

Scansionato con CamScanner

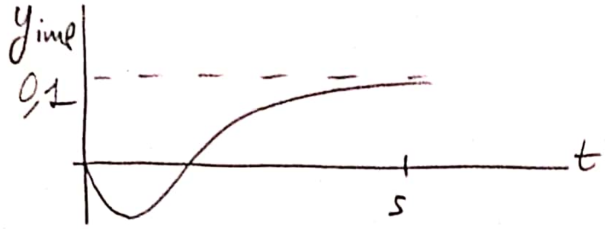
b)



$G = \frac{1}{s}\tilde{G}$ con $\tilde{G} = 0{,}1 \frac{1-100s}{(1+s)^2}$

$\mu_s = 1$ $\delta = 0$
$N = 1$
$\tilde{G}(0) = 0{,}1$
$T_R = 5$
$y(0) = 0$
$\dot{y}(0) < 0$

y_{imp} di G = y_{sca} di $\tilde{G}$



c) Criterio di Bode con $L = G$

- L propria
- L non ha poli a $\mathrm{Re} > 0$
- $|L|_{dB} \cap ! \ 0\,dB$

$\xrightarrow{\text{BODE}}$ $\mu = 0{,}1 > 0$

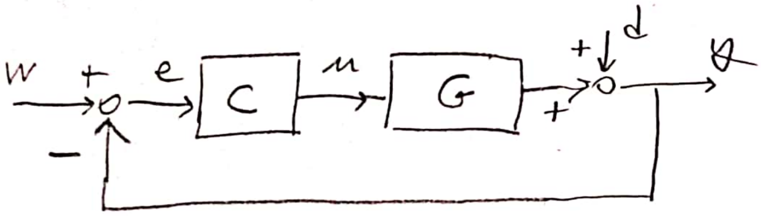
$\varphi_m < 0 \rightsquigarrow$ NON A.S.

$\omega_c \in (1, 10)$

$|\varphi_c| > \pi \Rightarrow \varphi_m = \pi - |\varphi_c| < 0$

9

Sia dato il sistema di controllo in figura



$$G(s) = 1000 \frac{100 - s}{(1000 + s)^2}$$

a) Determinare un controllore $C(s)$ avente un solo polo tale che il sistema di controllo sia asintoticamente stabile, garantisca un errore a regime a fronte di ingressi (riferimento w e disturbo d) costanti nullo e un tempo di risposta pari a 0,5

b) Determinare la banda passante del sistema di controllo

c) Valutare l'ampiezza dell'uscita a regime corrispondente a

$w(t) = \sin(t)$ $\quad d(t) = 0$

$w(t) = \sin(10000t)$ $\quad d(t) = 0$

Giustificare il risultato

d) Valutare l'ampiezza dell'errore a regime corrispondente a

$w(t) = 0$ $\quad d(t) = 0{,}2 \sin(0{,}1t)$

$w(t) = 0$ $\quad d(t) = 0{,}2 \sin(100t)$

Giustificare il risultato

---

a) errore a regime con ingressi costanti nullo $\Rightarrow$ L è di tipo $g > 0$ $\Rightarrow$ $C = \frac{\mu}{s}$

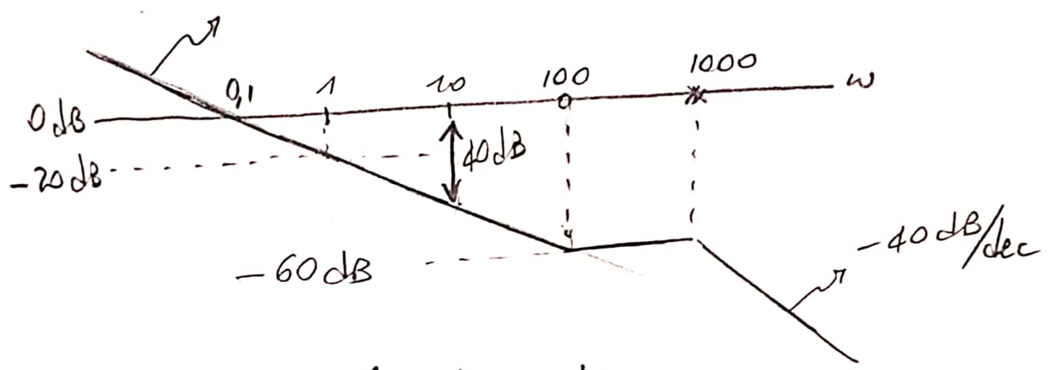
C ha un solo polo (che deve essere nell'origine affinché $g > 0$)

$$\Rightarrow L = 0{,}1\,\frac{\mu}{s}\,\frac{1-0{,}01s}{(1+0{,}001s)^2}$$

$$T_R = \frac{5}{\omega_c} \rightarrow \omega_c = \frac{5}{T_R} = \frac{5}{0{,}5} = 10$$

$$\mu = 1 \qquad L = \frac{0{,}1}{s}\,\frac{1-0{,}01s}{(1+0{,}001s)^2}$$

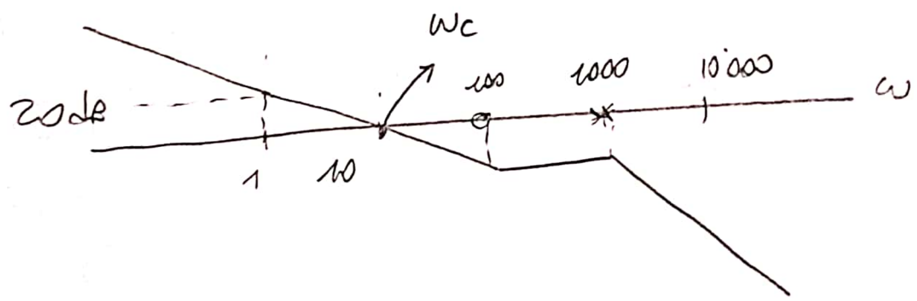
$|L|_{dB}$



$\omega_c = 10 \rightarrow$ devo salire di 40 dB

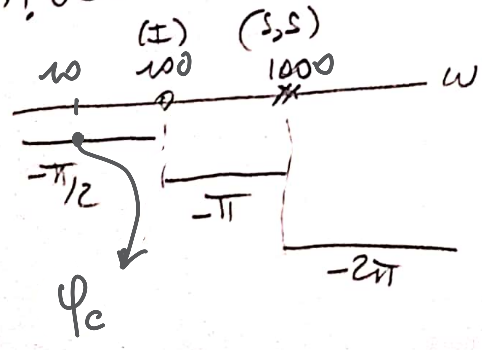
$$\mu = 10^2 \qquad C = \frac{10^2}{s}$$

$$L = \frac{10}{s}\,\frac{1-0{,}01s}{(1+0{,}001s)^2}$$



L propria L non ha poli a Re > 0 $\lvert L\rvert_{dB} \cap !\ 0\,dB$	$\xrightarrow{\text{BODE}}$	$\mu = 10 > 0$ $\varphi_m = \quad > 0$ $\longrightarrow$ A.S

$\measuredangle L$

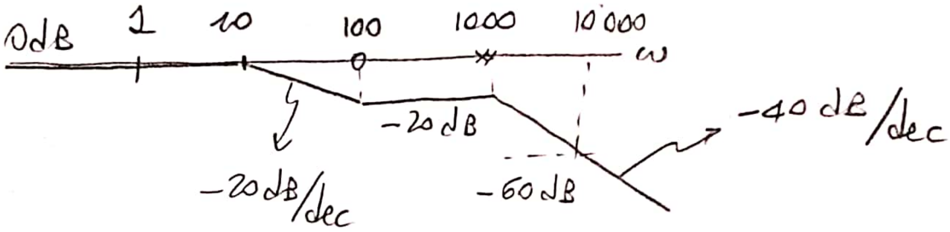


$$\varphi_c = -\frac{1}{2}\pi \qquad \varphi_m = \pi - |\varphi_c| = \frac{\pi}{2}$$

b) $B=(0,\omega_c)=(0,10)$

c) $Y=\left|\frac{L}{1+L}\right|_{s=i\omega} U$

$\left|\frac{L}{1+L}\right|_{dB}$

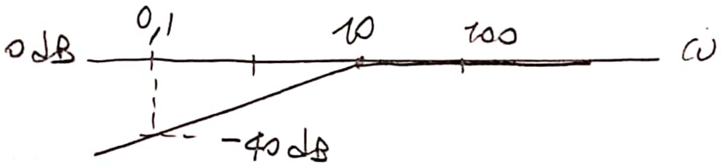


$\left|\frac{L}{1+L}\right|_{s=i}=1 \Rightarrow Y=1$ ~~w~~ è in banda e passa bene
$\omega=1\in B$

$\left|\frac{L}{1+L}\right|_{s=10'000i}=0{,}001 \Rightarrow Y=0{,}001$ w non è in banda e passa male
$\omega=10000\notin B$

d) $E=\left|\frac{1}{1+L}\right|_{s=i\omega} D$

$\left|\frac{1}{1+L}\right|_{dB}$



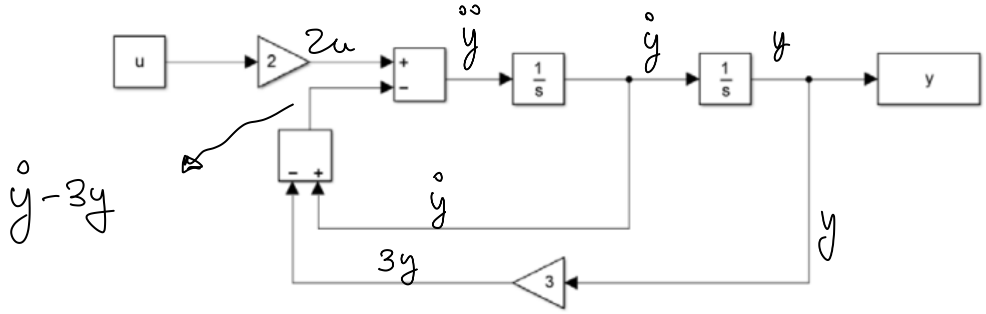
$\left|\frac{1}{1+L}\right|_{s=0{,}1i}=0{,}01 \Rightarrow E=0{,}01\cdot 0{,}2=0{,}002$ d è in banda e viene attenuato
$\omega=0{,}01\in B$

$\left|\frac{1}{1+L}\right|_{s=100i}=1 \Rightarrow E=0{,}2$ d è fuori banda e passa inalterato
$\omega=100\notin B$

Scansionato con CamScanner

10

Scrivere il modello ingresso/uscita (sia in forma di equazione differenziale che di funzione di trasferimento) corrispondente allo schema Simulink sotto riportato.



$$\ddot{y} = 2u - (\dot{y} - 3y) \Longrightarrow \ddot{y} + \dot{y} - 3y = 2u$$

$$(s^2 + s - 3)y = 2u \longrightarrow G(s) = \frac{2}{s^2+s-3}$$