

**Domanda 1 – 8 punti**

Una società finanziaria, all'inizio di ogni mese:

- eroga nuovi prestiti di durata quadrimestrale;
- riscuote l'interesse sui prestiti esistenti, nella misura del 1% dell'ammontare del prestito;
- incassa il rimborso dei prestiti giunti a scadenza;
- classifica come “persi”, in media, il 2% dei prestiti esistenti; questi non daranno più luogo ad interessi e non saranno riscuotibili alla scadenza.

a) Descrivere tale attività mediante un modello di stato, in cui  $u(t)$  rappresenta l'ammontare di nuovi prestiti erogati all'inizio del mese  $t$  e  $y(t)$  l'ammontare degli interessi riscossi.

b) Studiare la stabilità del modello.

Se, a partire da  $t = 0$ , ogni mese i nuovi prestiti erogati ammontano a 100.000 euro:

c) Calcolare l'ammontare mensile degli interessi riscossi a regime.

d) Determinare dopo quanti mesi il sistema ha raggiunto tale regime.

a)  $X_i(t)$  = ammontare dei prestiti esistenti da  $i$  mesi all'inizio del mese  $t$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ )

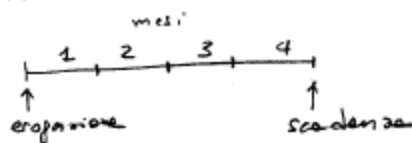
$$X_1(t+1) = 0,98 X_1(t)$$

$$X_2(t+1) = 0,98 X_1(t)$$

$$X_3(t+1) = 0,98 X_2(t)$$

$$X_4(t+1) = 0,98 X_3(t)$$

$$y(t) = 0,01 [X_1(t) + X_2(t) + X_3(t) + X_4(t)]$$



b)  $A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,98 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,98 & 0 \end{vmatrix} \quad \downarrow \lambda_A = \{0, 0, 0, 0\} \Rightarrow A \in \text{ASINT. ICRB}$

c)  $X_1 = 98.000 \text{ €}$   
 $X_2 = 96.040 \text{ €}$   
 $X_3 \approx 94.120 \text{ €} \quad y \approx 3807 \text{ €}$   
 $X_4 \approx 92.237 \text{ €}$

d)  $A$  è nilpotente  $\Rightarrow$  il sistema tende a regime al più in 4 mesi

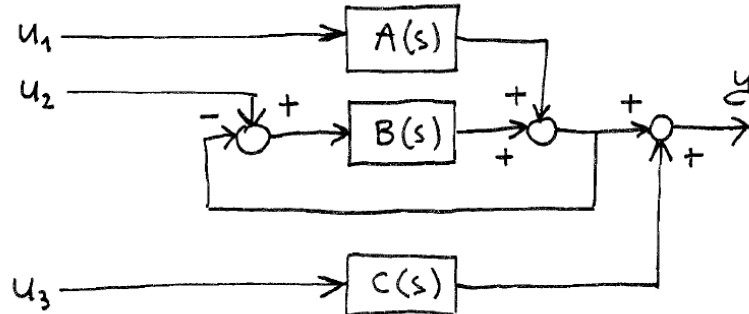
$$A^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad A^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad A^4 = 0$$

$\Rightarrow$  in 4 mesi

**Domanda 2 – 8 punti**

Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura, in cui i tre blocchi hanno funzione di trasferimento:

$$A(s) = \frac{1}{1 + 3s} \quad B(s) = \frac{10}{s(1 + s)} \quad C(s) = 2 \frac{(1 - s)(1 - 2s)}{(1 + s)(1 + 2s)(1 + 3s)}$$



- Determinare la funzione di trasferimento tra ciascuno degli ingressi e l'uscita  $y$ , discutendone la stabilità.
- Determinare qualitativamente, e rappresentare graficamente, l'andamento di  $y(t)$  quando agli ingressi  $u_1, u_2, u_3$  viene applicato uno scalino unitario agli istanti, rispettivamente,  $t = 0, 20, 40$ .

$$\begin{aligned}
 a) \quad u_1 \rightarrow y : \quad y &= A u_1 - B y \\
 (u_2 = u_3 = 0) \quad y &= \frac{A}{1+B} u_1 \quad \text{cloud} \quad F(s) = \frac{A}{1+B} = \frac{1}{1+3s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{10}{s(1+s)}} = \\
 &= \frac{s(1+s)}{(1+3s)(s^2+s+10)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{poli: } -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{39}}{2} : \text{ asintoticamente stabile,} \\
 T_R \approx 5 \cdot 3 = 15, \\
 \text{oscillazioni } \tau = \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{39}}{2}} \approx 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_2 \rightarrow y : \quad y &= B(u_2 - y) \\
 (u_1 = u_3 = 0) \quad y &= \frac{B}{1+B} u_2 \quad \text{cloud} \quad G(s) = \frac{B}{1+B} = \frac{\frac{10}{s(1+s)}}{1 + \frac{10}{s(1+s)}} = \\
 &= \frac{10}{s^2 + s + 10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{poli: } -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{39}}{2} : \text{ asintoticamente stabile,} \\
 T_R \approx 5 \cdot 2 = 10, \\
 \text{oscillazioni } \tau \approx 2
 \end{aligned}$$

$$u_3 \rightarrow y: y = C u_3 \quad C(s) = 2 \frac{(1-s)(1-2s)}{(1+s)(1+2s)(1+3s)}$$

$$(u_1 = u_2 = 0)$$

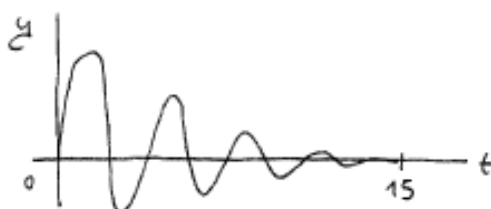
$$\text{poli: } -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} : \text{asintoticamente stabile}$$

$$T_R \approx 5 \cdot 3 = 15$$

b) risp. scalino di  $F(s)$ :

$$y_\infty = F(0) = 0$$

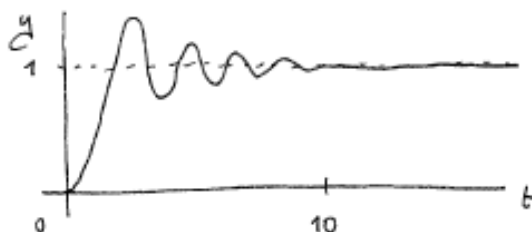
$$(r=1) \begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = \frac{1}{3} > 0 \end{cases}$$



risp. scalino di  $G(s)$ :

$$y_\infty = G(0) = 1$$

$$(r=2) \begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \\ \ddot{y}(0) = 10 > 0 \end{cases}$$

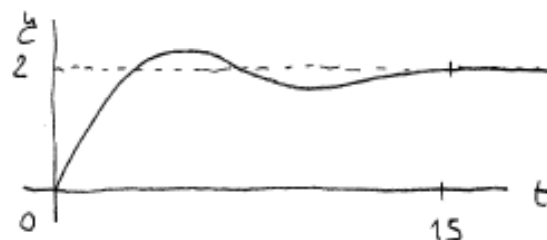


risp. scalino di  $C(s)$

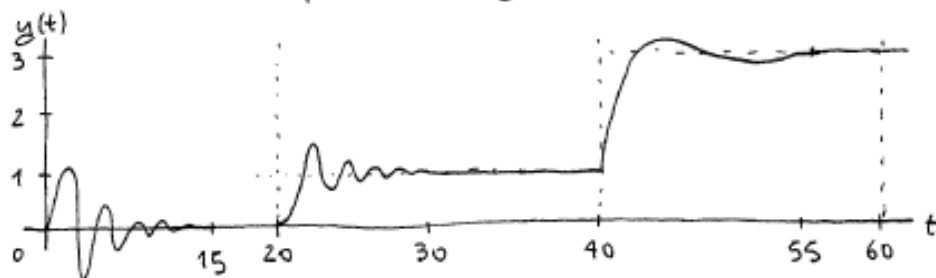
$$y_\infty = C(0) = 2$$

$$(r=1) \begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = \frac{4}{6} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \text{Im} \\ \text{Pe} \\ \text{N} = 2 \end{array}$$



Andamento complessivo di  $y(t)$ :



**Domanda 3 – 8 punti**

Si consideri il sistema lineare a tempo continuo descritto da

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$c = [0 \quad 1]$$

- a) Studiarne la stabilità, la raggiungibilità e l'osservabilità.
- b) Verificare se è possibile stabilizzarlo con una retroazione dinamica dall'uscita (regolatore = ricostruttore + legge di controllo) e, in caso affermativo, determinare un regolatore che porti il sistema all'equilibrio (approssimativamente) in un tempo  $t \leq 5$ .

a) Stabilità:  $\sigma(A) = \{2, 0.5\}$   $\text{Re}(2) > 0 \Rightarrow A$  INSTABILE

Raggiungibilità:

$$R = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\det R \neq 0 \Rightarrow (A, b)$  COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE

Osservabilità:

$$O = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$\det O \neq 0 \Rightarrow (A, c)$  COMPLETAMENTE OSSERVABILE

b) Poiché  $(A, b, c)$  è completamente raggiungibile e osservabile, è possibile stabilizzare il sistema. Anzi, è possibile assegnare arbitrariamente i 2 autovalori di  $(A+bk)$  e i 2 di  $(A+lc)$ . Per soddisfare il requisito sul tempo di risposta, impongo  $\sigma_{A+bk} = \sigma_{A+lc} = \{-1, -1\}$ , così  $T_d = 1$  e  $T_{RIS} = 5$ .

$$\Delta_{A+bk}^*(\lambda) = \Delta_{A+lc}^*(\lambda) = (\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 \quad ; \text{ sono i polinomi desiderati.}$$

$$A+bk = \begin{bmatrix} 2+k_1 & k_2 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \Delta_{A+bk} = \lambda^2 - (2.5+k_1)\lambda + 1 + 0.5k_1 + k_2$$

$$-(2.5+k_1) = 2; \quad 1 + 0.5k_1 + k_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -4.5 \\ k_2 = 2.25 \end{cases}$$

$$A+lc = \begin{bmatrix} 2 & l_1 \\ -1 & 0.5+l_2 \end{bmatrix} \quad \Delta_{A+lc} = \lambda^2 - (2.5+l_2)\lambda + 1 + l_1 + 2l_2$$

$$-(2.5+l_2) = 2; \quad 1 + l_1 + 2l_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} l_1 = 9 \\ l_2 = -4.5 \end{cases}$$

**RISPONDERE RIPORTANDO SUL FOGLIO LA SEQUENZA CORRETTA, CON "0" PER  
RISPOSTA NON DATA. Esempio: 1 - 3 - 0 - 2**

**Domanda 4 – 4 punti**

*Scegliere (senza giustificare) la risposta esatta. Vi è una sola risposta esatta per ogni quesito.  
(risposta esatta = +1, risposta errata = -0.5, risposta non data = 0)*

Un sistema lineare a tempo discreto caratterizzato dalla matrice di stato  $A$  non ammette un unico equilibrio se e solo se

- ☒ [1] la matrice  $A$  ha almeno un autovalore pari a 1.
- ☐ [2] la matrice  $A$  ha tutti gli autovalori pari a 1.
- ☐ [3] la matrice  $A$  ha almeno un autovalore pari a 0.
- ☐ [4] la matrice  $A$  ha tutti gli autovalori pari a 0.

Un sistema lineare di ordine 3 ha modello ingresso/uscita  $\ddot{y} + 2\dot{y} + \dot{y} + 2y = \ddot{u} - u$ . Per tale sistema si può affermare che

- ☒ [1] è asintoticamente stabile.
- ☐ [2] è semplicemente stabile.
- ☐ [3] è instabile in senso debole.
- ☐ [4] è instabile in senso forte.

La matrice Jacobiana di un sistema non lineare di ordine 3, a tempo discreto, valutata in un equilibrio  $\bar{x}$ , ha autovalori  $\lambda_1 = +1$ ,  $\lambda_2 = +0.5i$ ,  $\lambda_3 = -0.5i$ .

- ☐ [1] L'equilibrio  $\bar{x}$  è asintoticamente stabile.
- ☐ [2] L'equilibrio  $\bar{x}$  è semplicemente stabile.
- ☐ [3] L'equilibrio  $\bar{x}$  è instabile.
- ☒ [4] Non si può affermare nulla sulla stabilità dell'equilibrio  $\bar{x}$ .

Un sistema lineare ha risposta a scalino unitario pari a  $y(t) = 1 + e^{-t}$ . La funzione di trasferimento che lo ha generato è pari a

- ☐ [1]  $G(s) = \frac{2s-1}{s+1}$
- ☒ [2]  $G(s) = \frac{2s+1}{s+1}$
- ☐ [3]  $G(s) = \frac{2s-1}{s-1}$
- ☐ [4]  $G(s) = \frac{2s+1}{s-1}$



**Domanda 5 – 2 punti**

Dato un sistema di controllo, discutere, in funzione del tipo  $h$  ( $h \geq 0$ ) della funzione di trasferimento d'anello  $L(s)$ , il valore dell'errore a regime dovuto a riferimento  $w$  e disturbo additivo  $d$  in uscita (o di processo) costanti.

$$e = \frac{1}{1+L} w - \frac{1}{1+L} d$$

$$w(t) = \bar{w} \rightarrow W(s) = \frac{\bar{w}}{s}$$

$$d(t) = \bar{d} \rightarrow D(s) = \frac{\bar{d}}{s}$$

$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \cancel{s} \frac{1}{1+L} \frac{\bar{w}}{\cancel{s}} - \cancel{s} \frac{1}{1+L} \frac{\bar{d}}{\cancel{s}} \right)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} L(s) = \frac{\mu}{s^h} \rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+L} = \frac{s^h}{s^h + \mu} \begin{matrix} \xrightarrow{h=0} \frac{1}{1+\mu} \\ \xrightarrow{h>1} 0 \end{matrix}$$

$$h=0 \quad e_{\infty} = \frac{1}{1+\mu} \bar{w} - \frac{1}{1+\mu} \bar{d}$$

$$h>0 \quad e_{\infty} = 0$$

**Domanda 6 - 2 punti**

Sia dato il sistema

$$x_1(t+1) = -0.5x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) + u(t)$$

$$x_2(t+1) = -x_1(t) + 0.6x_2(t) - 0.5x_3(t) + u(t)$$

$$x_3(t+1) = -x_1(t) + x_2(t) - 0.8x_3(t) + u(t)$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

Scrivere la sequenza di istruzioni Matlab che permette di studiarne la stabilità e calcolarne lo stato e l'uscita di equilibrio quando l'ingresso  $u$  è costante e vale  $u = -2$ .

Stabilità

$$A = [-0.5 \quad 1 \quad -1; -1 \quad 0.6 \quad -0.5; -1 \quad 1 \quad -0.8]$$

$$\text{autovalori} = \text{eig}(A)$$

$$\text{modulo} = \text{abs}(\text{autovalori})$$

Stato e uscita di equilibrio

$$\begin{pmatrix} \bar{x} = (I - A)^{-1} b \bar{u} \\ \bar{y} = C \bar{x} + d \bar{u} \end{pmatrix}$$

$$b = [1 \quad 1 \quad 1]'$$

$$x_{eq} = \text{inv}(\text{eye}(\text{size}(A)) - A) * b * (-2)$$

$$c = [1 \quad 1 \quad 1]$$

$$y_{eq} = c * x_{eq}$$