

Domanda 1 – 8 punti

In un'azienda manifatturiera, la produzione è ripartita su un elevato numero di macchine tra loro uguali. Sono note le probabilità che una macchina incorra in un guasto nel corso di un anno, in relazione alla sua età.

| età | da 0 a 1 anno | da 1 a 2 anni | da 2 a 3 anni | da 3 a 4 anni |
|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| Prob. guasto | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 |

In caso di guasto, la macchina viene eliminata poiché la riparazione non è conveniente. Ogni macchina viene comunque eliminata al compimento del quarto anno di attività, in quanto obsoleta.

- a) Descrivere l'evoluzione nel tempo dell'insieme delle macchine mediante un sistema dinamico a tempo discreto, in cui $u(t)$ indichi il numero di nuove macchine acquistate e $y(t)$ il totale di macchine in servizio.
- b) Studiare la stabilità del sistema, discutendo anche il tempo di risposta e l'eventuale presenza di oscillazioni nel movimento libero.
- c) Determinare la funzione di trasferimento del sistema.
- d) Si ipotizzi ora che l'attività di ciascuna macchina fruttì un profitto annuo p e che il costo per l'acquisto di una nuova macchina sia c . Modificare il modello precedente, assumendo che l'azienda spenda ogni anno per l'acquisto di nuovi macchinari esattamente la frazione $0 < \alpha < 1$ del profitto ottenuto.
- e) Studiare la stabilità del sistema ottenuto al punto c), ponendo $c = p$ e $\alpha = 0.1$ (è richiesto l'utilizzo di un metodo formale di analisi – no calcolatrice).

Traccia della soluzione:

a) $x_i(t)$, $i=1,2,3,4$: n° macchine in servizio da i anni all'istante t

$$x_1(t+1) = (1-g_1)u(t) = u(t)$$

$$x_2(t+1) = (1-g_2)x_1(t) = 0.9x_1(t)$$

$$x_3(t+1) = (1-g_3)x_2(t) = 0.8x_2(t)$$

$$x_4(t+1) = (1-g_4)x_3(t) = 0.7x_3(t)$$

↳ prob. guasto

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t)$$

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$ $\sigma(A) = \{0, 0, 0, 0\}$ $|\lambda_i| < 1 \forall i$
 \Rightarrow ASINTOT. STABILE
Sistema a memoria finita: $T_R \leq n = 4$
 λ_i reali non negativi \Rightarrow \nexists oscillazioni.

c) $\begin{cases} z x_1 = u \\ z x_2 = 0.9 x_1 \\ z x_3 = 0.8 x_2 \\ z x_4 = 0.7 x_3 \end{cases} \Rightarrow y = \left[\frac{1}{z} + \frac{0.9}{z^2} + \frac{0.9 \times 0.8}{z^3} + \frac{0.9 \times 0.8 \times 0.7}{z^4} \right] u$
 $G(z) = \frac{z^3 + 0.9z^2 + 0.72z + 0.504}{z^4}$

d) Cambia solo la 1ª equazione:

$$x_1(t+1) = (1-g_1) \alpha \frac{P}{C} (x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t))$$

e) $A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$ A è una matrice NON NEGATIVA.
 $\lambda_0 = \text{aut. dominante e REALE } \geq 0$
 $0.4 \leq \lambda_0 \leq 0.9$
↓
min e max somma di riga
 $\lambda_0 < 1 \Rightarrow$ ASINT. STABILE

Domanda 2 – 8 punti

Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo continuo di ordine $n = 2$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1 \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 - x_2^3 - x_1\end{aligned}$$

- a) Determinare gli stati di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità con il metodo della linearizzazione, classificando inoltre gli equilibri (nodo, fuoco, ecc.).
- ~~b) Tracciare il quadro delle traiettorie nell'intorno degli stati di equilibrio.~~
- ~~c) Tracciare un plausibile quadro delle traiettorie globale.~~

a) equilibri: $\begin{cases} x_2 = x_1 \\ 2x_2 - x_2^3 - x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{x}' = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \bar{x}'' = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \bar{x}''' = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}$

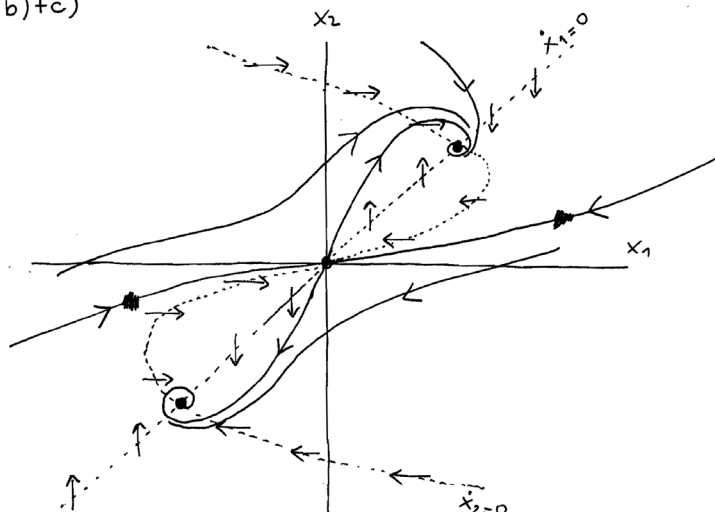
Jacobiano $A(x) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2-3x_2^2 \end{vmatrix}$

$A(\bar{x}') = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} \text{tr} A > 0 \\ \det A < 0 \end{cases} \quad \bar{x}' \text{ INSTABILE (sella)}$
 $\Delta(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$
 $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{matrix} \nearrow -0.62 \\ \searrow 1.62 \end{matrix}$

autovettori: $Ax = \lambda x, \lambda = -0.62 \Rightarrow x_2 \simeq 2.65 x_1$
 $\lambda = 1.62 \Rightarrow x_2 \simeq 0.38 x_1$

$A(\bar{x}'') = A(\bar{x}''') = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} \text{tr} A < 0 \\ \det A > 0 \end{cases} \quad \bar{x}'', \bar{x}''' \text{ ASINT. STABILI}$
 $\Delta(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$
 $\lambda = -1 \pm i \text{ (Fuoco stabile)}$

b)+c)



Domanda 3 – 8 punti

Un'apparecchiatura è sottoposta a prove sperimentali allo scopo di ricavarne la funzione di trasferimento $G(s)$. Applicando ingressi sinusoidali $u(t) = \sin(\omega t)$ di ampiezza unitaria e aventi varie frequenze ω ("prova in frequenza"), si è rilevata l'ampiezza dell'uscita a transitorio esaurito $y(t) = Y \sin(\omega t + \varphi)$:

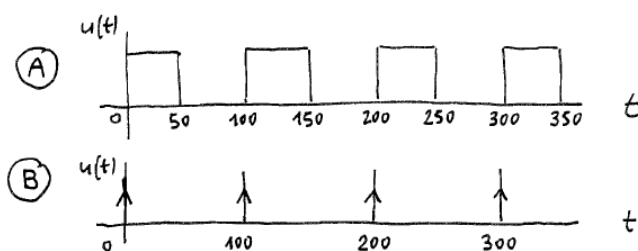
| | | | |
|----------|------|----|------|
| ω | 0.01 | 10 | 1000 |
| Y | 1 | 10 | 0.1 |

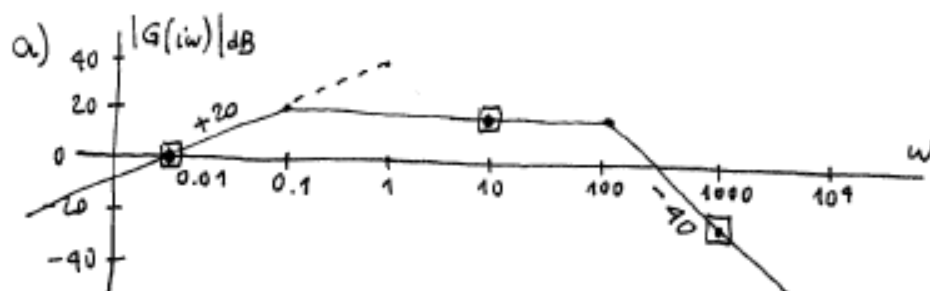
Si è inoltre rilevato che lo sfasamento φ tende a $-\pi$ quando $\omega \rightarrow \infty$.

Applicando invece un ingresso costante $u(t) = \bar{u}$ ("prova statica"), l'uscita tende a zero qualunque sia il valore dell'ingresso.

a) Determinare una funzione di trasferimento $G(s)$ compatibile con i risultati delle prove sperimentali.

b) Determinare qualitativamente e rappresentare graficamente la risposta di $G(s)$ alle due funzioni di ingresso in figura.





$$G(s) = 100s \frac{1}{(1+10s)(1+0.01s)^2}$$

Per $\omega \rightarrow \infty$, $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} - 3\frac{\pi}{2} = -\pi$, ok.

Per ingresso costante, $\bar{y} = G(0)\bar{u} = 0$, ok.

b) Risposta allo scalino di $G(s)$:

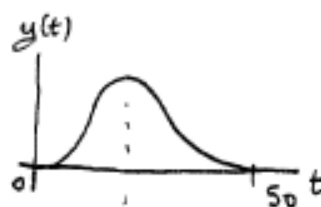
• asintot. stabile, $\text{Re}(p_i) < 0 \forall i$

• $T_R \approx 5T_D = 50$

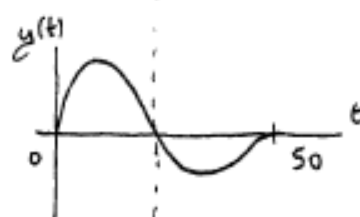
• $\bar{y} = 0$ (vedi sopra)

• $y(0) = 0 = \dot{y}(0)$, $\ddot{y}(0) = 10^5 > 0$ ($r=2$)

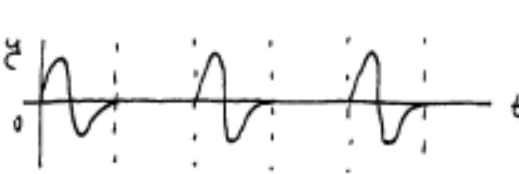
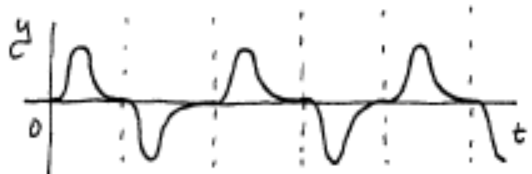
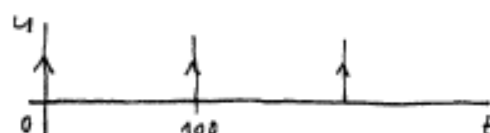
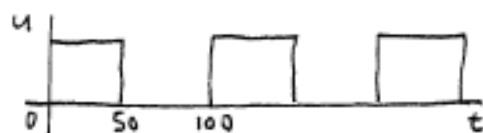
• estremi: $1 \leq N \leq 1$



Risposta all'impulso di $G(s)$:
ottenuta derivando la risposta
allo scalino.



Quindi:



**RISPONDERE RIPORTANDO SUL FOGLIO LA SEQUENZA CORRETTA, CON "0" PER
RISPOSTA NON DATA. Esempio: 1 - 3 - 0 - 2**

Domanda 4 – 4 punti

*Scegliere (senza giustificare) la risposta esatta. Vi è una sola risposta esatta per ogni quesito.
(risposta esatta = +1, risposta errata = -0.5, risposta non data = 0)*

Il tempo di risposta di un sistema di controllo con funzione di trasferimento di anello

$$L(s) = 100 \frac{s}{(1+s)(10+s)}$$

- [1] è circa pari a 5
- [2] è circa pari a 0.5
- ~~[3]~~ è circa pari a 50
- [4] non è determinabile, non essendo nota la stabilità del sistema di controllo

Un sistema lineare a tempo discreto ha autovalori $\sigma(A) = \{-2, -1, -0.5\}$.

Il sistema

- [1] è asintoticamente stabile
- [2] è semplicemente stabile
- ~~[3]~~ è instabile
- [4] non si può rispondere noti i soli autovalori

Per ogni condizione iniziale non nulla il suo movimento libero

- [1] è monotono
- ~~[2]~~ presenta oscillazioni
- [3] tende a zero
- [4] non si può rispondere noti i soli autovalori

In un sistema lineare inizialmente a riposo ($x(0) = 0$), applicando l'ingresso $u(t)$ si ottiene il movimento di uscita $y(t)$. Applicando ora l'ingresso $u'(t) = u(t) + 2$, qualunque sia $u(t)$ si ha che:

- [1] il movimento di uscita aumenta di 2 in ogni istante ($y'(t) = y(t) + 2$)
- [2] il movimento di uscita raddoppia in ogni istante ($y'(t) = 2y(t)$)
- [3] il movimento di uscita rimane invariato ($y'(t) = y(t)$)
- ~~[4]~~ nessuna delle risposte precedenti è corretta

Domanda 5 – 2 punti

Si fornisca la definizione di sistema stabilizzabile.

Si precisi sotto quali condizioni un sistema è stabilizzabile.

Si dica infine se il sistema

$$\dot{x}_1 = -2x_1$$

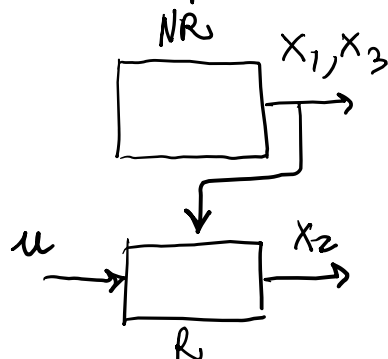
$$\dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 + x_3 + u$$

$$\dot{x}_3 = -3x_1 + x_3$$

$$y = x_3$$

è stabilizzabile.

- Un sistema (A, b) è stabilizzabile quando \exists una legge di controllo k ($u = kx + v$) tale che $A + bk$ sia asintoticamente stabile.
- Se (A, b) è CR allora è stabilizzabile
- Se (A, b) NON è CR, è stabilizzabile se e solo se la sua parte NR è asintoticamente stabile.



$$A = \left[\begin{array}{c|cc} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \{\lambda\} = \{-2, 2, 1\}$$

$$R \rightarrow \lambda_R = 2$$

$$NR \rightarrow \lambda_{NR} = \{-2, 1\}$$

\hookrightarrow NR non è A.S. \Rightarrow il sistema non è stabilizzabile

Domanda 6 – 2 punti

Illustrare i comandi Matlab per simulare l'andamento dell'uscita del sistema dinamico

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 - 5x_2$$

$$y = 2x_1 - 3u$$

partendo dalla condizione iniziale $x(0) = [-1 \ 2]^T$, su un orizzonte di $T = 10$ unità di tempo, con ingresso costante $u = 2$.

```
A=[-1 -1; 2 -5];  
b=[1 0]';  
c=[2 0];  
d=-3;  
sistema=ss(A,b,c,d);  
x0=[-1 2]';  
T=0:0.01:10;  
u=2*ones(size(T));  
lsim(sistema,u,T);
```