

Domanda 1 – 8 punti

Si consideri il seguente sistema a tempo continuo di ordine $n = 2$:

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1$$

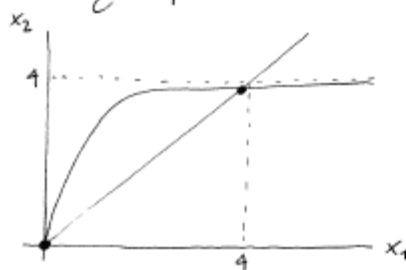
$$\dot{x}_2 = 4(1 - \exp(-x_1)) - x_2$$

a) Determinare gli stati di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità.

~~b) Aiutandosi con il tracciamento delle isocline, proporre un plausibile quadro globale delle traiettorie nel quadrante positivo.~~

a)

② Troviamo gli equilibri tracciando le isocline nel piano di stato:



$$\dot{x}_1 = 0 : x_2 = x_1$$

$$\dot{x}_2 = 0 : x_2 = 4(1 - e^{-x_1})$$

La pendenza in $x_1 = 0$ è 4

2 equilibri: $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e \bar{x}'' .

$$J = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4e^{-x_1} & -1 \end{vmatrix}$$

$$J(\bar{x}') = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{tr } J = -2 < 0$$

$$\det J = 1 - 4 = -3 < 0$$

INSTABILE (sella)

$$J(\bar{x}'') = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4e^{-\bar{x}_1''} & -1 \end{vmatrix}$$

all'equilibrio: $4(1 - e^{-\bar{x}_1''}) = \bar{x}_1''$ (intersezione retta/curva)
quindi $4 - \bar{x}_1'' = 4e^{-\bar{x}_1''}$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 - \bar{x}_1'' & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{tr } J = -2 < 0$$

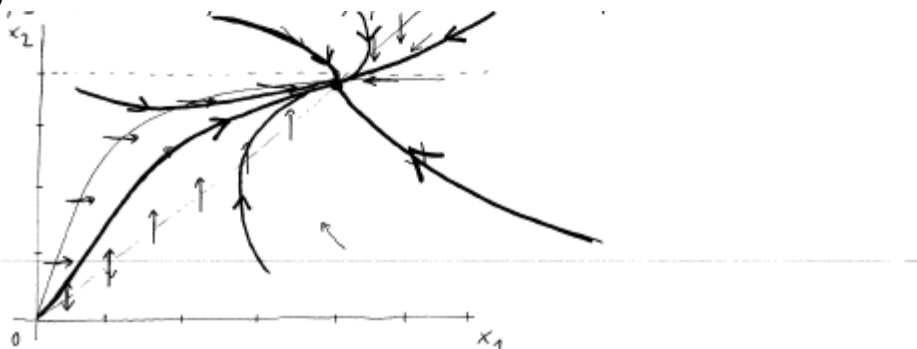
$$\det J = 1 - 4 + \bar{x}_1'' = -3 + \bar{x}_1'' > 0 \text{ poiché } \bar{x}_1'' > 3$$

ASINTOT. STABILE

(vedi sotto)

(verifico che $\bar{x}_1'' > 3$ mostrando che, per $x = 3$, l'esponenziale $4(1 - e^{-x_1})$ è SOPRA la retta $x_2 = x_1$. Deve cioè essere $4(1 - e^{-3}) > 3$, da cui $e^3 > 4$ che è sicuramente vera)

b)



Domanda 2 – 8 punti

Si consideri il sistema lineare a tempo continuo descritto dalla seguente terna di matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$c = [1 \quad p \quad 0]$$

- a) Studiarne la stabilità interna (asintotica) ed esterna, per ogni $p \in \mathbb{R}$.
- b) Studiarne la completa raggiungibilità e osservabilità, per ogni $p \in \mathbb{R}$.

a) $\sigma(A) = \{2, -1, -2\} \exists \lambda_i > 0 \Rightarrow A$ instabile $\forall p$

Calcolo la f. di t.:

$$\begin{cases} sX_1 = -2X_1 + X_3 \\ sX_2 = X_1 + 2X_2 \\ sX_3 = -X_3 + u \\ y = X_1 + pX_2 \end{cases} \rightarrow G(s) = \frac{s+(p-2)}{(s-2)(s+1)(s+2)}$$

Se $p \neq 0, 3, 4 : \{\text{poli}\} = \{-2, -1, 2\} \Rightarrow \text{INSTABILE}$

Se $p = 0, 3, 4$: perdita di grado. In particolare,

se $p = 0$: $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad \text{poli} < 0 \Rightarrow \text{ESTERNAMENTE STABILE}$

b) $R = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \det R \neq 0 \Rightarrow (A, b) \text{ compl. raggiungibile } \forall p$

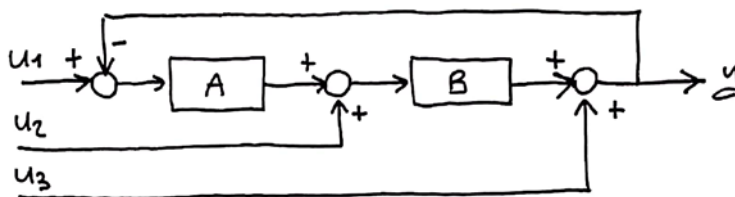
$$\Theta = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & p & 0 \\ -2+p & 2p & 1 \\ 4 & 4p & -3+p \end{bmatrix}$$

$\det \Theta = 0$ per $p \in \{0, 3, 4\}$, i valori che fanno perdere grado a $G(s)$: per questi valori di p , (A, c) NON è completamente osservabile, mentre lo è \forall altro p .

Domanda 3 – 8 punti

Si consideri il sistema in figura, in cui i blocchi A e B hanno funzione di trasferimento:

$$A(s) = \frac{4}{s+3} \quad B(s) = \frac{1}{s-1}$$



- Studiare la stabilità dei blocchi A e B.
- Determinare le funzioni di trasferimento tra i tre ingressi e l'uscita, studiandone poi la stabilità.
- Determinare qualitativamente, e rappresentare graficamente, l'uscita complessiva del sistema quando i tre ingressi valgono

$$u_1 = sca(t), \quad u_2 = sca(t-5), \quad u_3 = sca(t-10)$$

- a) $A(s): p = -3 < 0 \Rightarrow$ esternamente stabile
 $B(s): p = 1 > 0 \Rightarrow$ instabile

b) $y = u_3 + B(u_2 + A(u_1 - y))$

$$y = \underbrace{\frac{AB}{1+AB}}_{G_1} u_1 + \underbrace{\frac{B}{1+AB}}_{G_2} u_2 + \underbrace{\frac{1}{1+AB}}_{G_3} u_3$$

$$G_1(s) = \frac{4}{(s+1)^2}$$

$$G_2(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2}$$

$$G_3(s) = \frac{(s+3)(s-1)}{(s+1)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} G_1(s) = \frac{4}{(s+1)^2} \\ G_2(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2} \\ G_3(s) = \frac{(s+3)(s-1)}{(s+1)^2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \{poli\} = \{-1, -1\} \\ \Rightarrow G_1, G_2, G_3 \text{ esternamente stabili} \\ (T_R \approx 5T_D = 5) \end{array}$$

c) calcolo le risposte allo scalino individuali di G_1, G_2, G_3 :

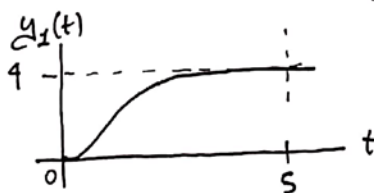
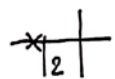
$G_1: G_1(0) = y_\infty = 4$

$r=2: y(0)=0$

$\dot{y}(0)=0$

$\ddot{y}(0)=4 > 0$

$N=0$

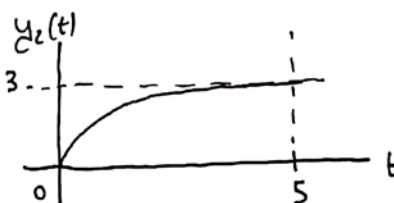
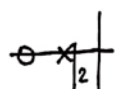


$G_2: G_2(0) = y_\infty = 3$

$r=1: y(0)=0$

$\dot{y}(0)=1 > 0$

$N=0$



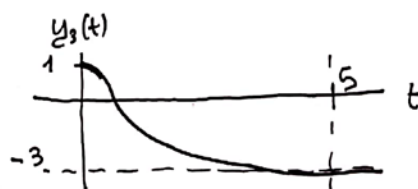
$G_3: G_3(0) = y_\infty = -3$

$r=0: y(0)=1$

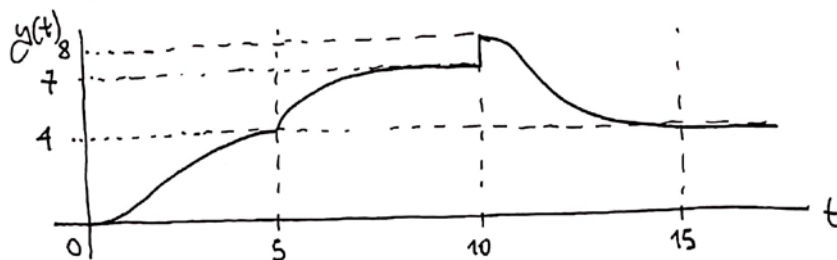
$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s(sY(s) - y(0)) = 0$

$\ddot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s(s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)) = -4 < 0$

[G_3 IMPROPRIA, non si può usare il th. degli estremi]



Complessivamente:

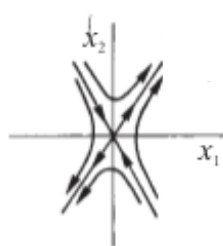


RISPONDERE RIPORTANDO SUL FOGLIO LA SEQUENZA CORRETTA, CON "0" PER RISPOSTA NON DATA. Esempio: 1 - 3 - 0 - 2

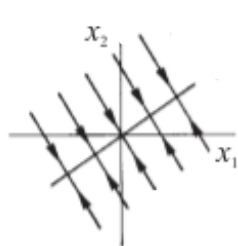
Domanda 4 – 4 punti

Scegliere (senza giustificare) la risposta esatta. Vi è una sola risposta esatta per ogni quesito.
(risposta esatta = +1, risposta errata = -0.5, risposta non data = 0)

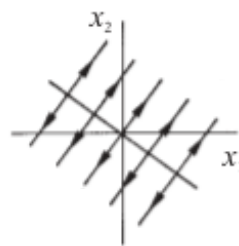
~~Le traiettorie di un sistema lineare a tempo continuo definito dalla matrice di stato A avente traccia nulla e determinante positivo sono qualitativamente date da~~ (1)



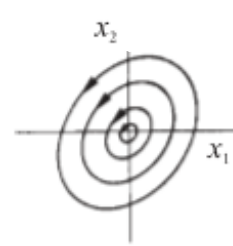
[1]



[2]



[3]



~~[4]~~

$tr = 0 \rightarrow \begin{matrix} * \\ * \end{matrix}$

Un sistema lineare a tempo discreto ha matrice di stato $A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

- [1] Il sistema è asintoticamente stabile.
- [2] Il sistema è semplicemente stabile.
- ~~[3]~~ Il sistema è instabile.
- [4] Non si può affermare nulla sulla stabilità del sistema.

$|\lambda| < 1$
 $\hookrightarrow |tr| = |-4| = 4 > n = 3 \Rightarrow \text{INSTAB}$

La matrice Jacobiana di un sistema non lineare di ordine 3, a tempo discreto, valutata in un equilibrio \bar{x} , ha autovalori $\lambda_1 = +1$, $\lambda_2 = +0.5i$, $\lambda_3 = -0.5i$.

- [1] L'equilibrio \bar{x} è asintoticamente stabile.
- [2] L'equilibrio \bar{x} è semplicemente stabile.
- [3] L'equilibrio \bar{x} è instabile.
- ~~[4]~~ Non si può affermare nulla sulla stabilità dell'equilibrio \bar{x} .

$\hookrightarrow |\lambda_i| \leq 1 \forall i$
 $\exists j / |\lambda_j| = 1$

Sia $L(s)$ la funzione di trasferimento d'anello di un sistema di controllo. $L(s)$ ha guadagno μ positivo e due poli reali negativi.

- [1] Il sistema di controllo è instabile per ogni μ .
- ~~[2]~~ Il sistema di controllo è asintoticamente stabile per ogni μ .
- [3] Il sistema di controllo è asintoticamente stabile se e solo se $\mu > 1$.
- [4] Non vi sono sufficienti informazioni per studiare la stabilità del sistema di controllo.

$L = \frac{M}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$

$DEN(1+L) = s^2 T_1 T_2 + s(T_1 + T_2) + (1+\mu)$
coeff positivi ($n=2$) \Rightarrow A.S. $\forall \mu > 0$

Domanda 5 – 2 punti

Siano dati due sistemi $S_1 = (A_1, b_1, c_1)$ e $S_2 = (A_2, b_2, c_2)$.

Discutere la stabilità dei tre sistemi ottenuti aggregando S_1 e S_2 , rispettivamente, in cascata, parallelo e retroazione, motivando i risultati.

Proporre infine un esempio di sistemi S_1 asintoticamente stabile e S_2 instabile che diano luogo a un aggregato in retroazione asintoticamente stabile.

$A =$ matrice di stato del sistema aggregato

CASCATA $A = \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ x & A_2 \end{vmatrix}$

$$\{\lambda\}_A = \{\lambda\}_{A_1} \cup \{\lambda\}_{A_2}$$

A A.S. $\Leftrightarrow A_1$ e A_2 sono A.S.

PARALLELO $A = \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix}$... come per il collegamento in cascata

RETROAZIONE $A = \begin{vmatrix} A_1 & x \\ x & A_2 \end{vmatrix}$

$\{\lambda\}_A$ non dipende da $\{\lambda\}_{A_1}$ e $\{\lambda\}_{A_2}$

Quindi non si possono trarre conclusioni sulle stabilità di A a partire dalle stabilità di A_1 e A_2

$$S_1 \rightarrow \begin{matrix} \dot{x} = -x + u \\ y = x \end{matrix} \rightarrow G_1 = \frac{1}{s+1} \quad \lambda = -1 \rightarrow \text{A.S.}$$

$$S_2 \rightarrow \begin{matrix} \dot{x} = \frac{1}{2}x + u \\ y = x \end{matrix} \rightarrow G_2 = \frac{1}{s - \frac{1}{2}} \quad \lambda = \frac{1}{2} \rightarrow \text{I.}$$

$$G = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2}$$

$$\text{Den}(G) = (s+1)\left(s - \frac{1}{2}\right) + 1 = s^2 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}$$

$$a_i > 0 \Rightarrow \text{A.S.}$$

Domanda 6 – 2 punti

In Matlab, si vogliono tracciare i diagrammi di Bode del sistema a tempo continuo definito dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = [1 \quad 0] \quad d = 0$$

Qual è la sequenza di comandi da digitare?

Quali comandi occorre digitare per ottenere l'ampiezza e la fase (in radianti) della sinusoide di uscita a transitorio esaurito corrispondente al segnale di ingresso $u(t) = 3\sin(4t)$?

```
A=[-1 -2;0 -2];  
b=[0 1]';  
c=[1 0];  
d=0;  
sistema=ss(A,b,c,d);  
bode(sistema);  
  
[modulo,fase] = bode(sistema,4);  
ampiezza_uscita=3*modulo;  
fase_uscita=fase*2*pi/360;
```