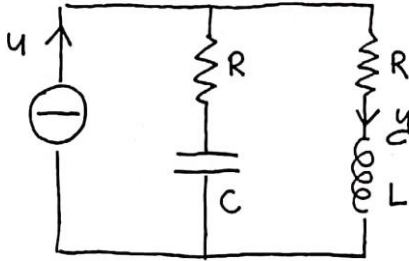


Domanda 1 – 8 punti

Si consideri la rete elettrica in figura, comandata da un generatore di corrente $u(t)$.



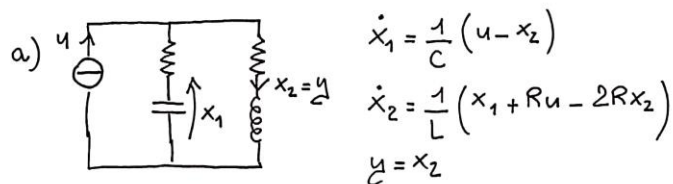
- a) Si scrivano le equazioni di stato e di uscita del sistema, prendendo come uscita $y(t)$ la corrente nell'induttore.
- b) Si discuta la stabilità del sistema per ogni $R, L, C > 0$.
- c) Si determini la funzione di trasferimento.

Si considerino ora i due casi (a) e (b) così specificati:

(a) $R = 3, \quad L = 1, \quad C = 1/5$

(b) $R = 1, \quad L = 1, \quad C = 1/10$

- d) In entrambi i casi (a) e (b), determinare e rappresentare graficamente la risposta allo scalino unitario della rete elettrica.
- e) ~~Nel solo caso (a), si consideri il movimento libero del circuito ($u(t) = 0 \forall t$). Supponendo che esista un blocco di sicurezza che interviene qualora la corrente nell'induttore diventi negativa, si discuta se tale blocco interviene, e sotto quali condizioni, partendo dagli stati iniziali $x(0)$ in cui tale corrente è positiva.~~



b)

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{2R}{L} \end{vmatrix} \quad \left. \begin{aligned} \text{tr} A &= -\frac{2R}{L} < 0 \\ \det A &= \frac{1}{LC} > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \text{ asint. stabile} \quad \forall R, L, C > 0$$

c)

$$\begin{aligned} sX_1 &= \frac{1}{C}(u - x_2) \\ sX_2 &= \frac{1}{L}(x_1 + Ru - 2Rx_2) \\ y &= x_2 \end{aligned} \Rightarrow G(s) = \frac{sCR + 1}{s^2LC + 2sCR + 1}$$

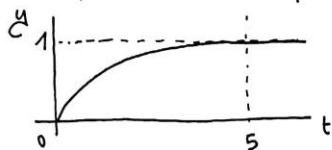
d) caso (a):

$$G(s) = \frac{3s + 5}{s^2 + 6s + 5}$$

$G(s)$ asint. st.: $y(t) \rightarrow G(0) = 1$, $T_R \approx 5T_D = 5$

$r=1$: $y(0)=0$, $\dot{y}(0)=3 > 0$

\nexists zeri superiori o male inquadriati: $N=0$



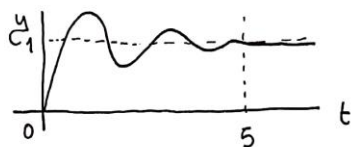
caso (b):

$$G(s) = \frac{s+10}{s^2+2s+10}$$

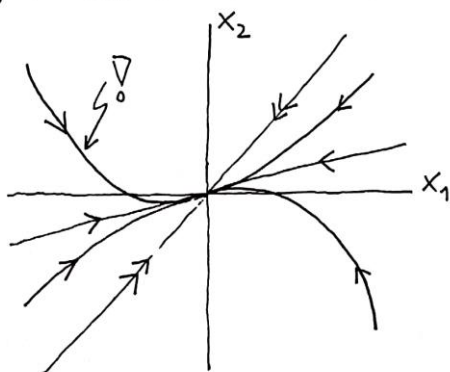
$G(s)$ asint. st.: $y(t) \rightarrow G(0) = 1$, $T_R \approx 5T_D = 5$

$r=1$: $y(0)=0$, $\dot{y}(0)=1 > 0$

poli complessi: oscillazioni smorzate di periodo $\tau = \frac{2\pi}{3}$



e) traiettorie nel movimento libero ($\bar{u}=0 \Rightarrow \bar{x}=0$):



autovettori:

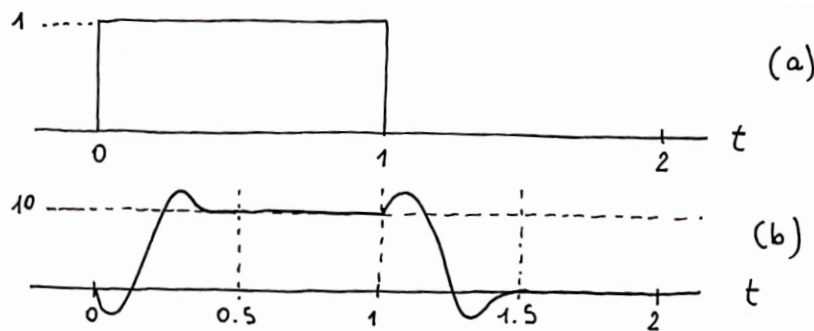
$\lambda = -1$: $x_2 = \frac{1}{5}x_1$

$\lambda = -5$: $x_2 = x_1$

Partendo da $x_2(0) > 0$, $x_2(t)$ diventa negativa (= il blocco interviene) se $x(0)$ è sopra l'autovettore non dominante.

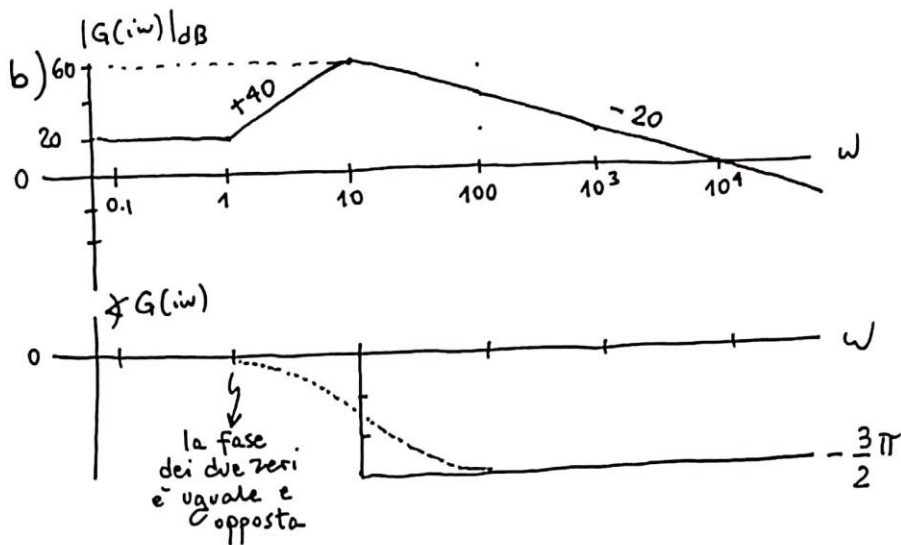
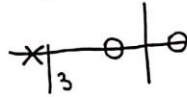
Domanda 2 – 8 punti

In figura (b) è rappresentata la risposta $y(t)$ di un sistema lineare, inizialmente scarico, all'ingresso $u(t)$ di figura (a).



- Determinare una funzione di trasferimento $G(s)$, del minimo ordine possibile e con poli e zeri tutti reali, compatibile con la risposta sopra rappresentata (*motivare sinteticamente la scelta*).
- Disegnare i diagrammi di Bode (modulo e fase) di $G(s)$.
- Mediante il criterio di Bode (dopo averne verificato le condizioni di applicabilità), studiare la stabilità del sistema di controllo avente $G(s)$ come funzione di trasferimento d'anello.

- a) Il segnale (b) è una sequenza di due risposte allo scalino (il primo di valore +1 e il secondo -1). Analizziamo la prima risposta ($0 \leq t < 1$); poiché la seconda è uguale e opposta.
 $y(t) \rightarrow 10$, quindi $G(s)$ asint. stabile; $G(0) = 10$; $T_d = 0.1$
 $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) < 0$, quindi $r = 1$
 2 estremi, quindi (p.e.) 2 zeri superiori, di cui uno positivo (perché $\dot{y}(0) < 0$)
 Una possibile scelta: $G(s) = 10 \frac{(1-s)(1+s)}{(1+0.1s)^3}$



- c) condizioni di applicabilità:
- * $G(s)$ non ha poli con $\text{Re}(p) > 0$ ✓ ok
 - * $|G(i\omega)|_{dB} = 0$ in una e una sola ω ✓ ok
 $(\omega = \omega_c = 10^4)$

allora

- * $M = 10 > 0$ ✓ ok
 ma

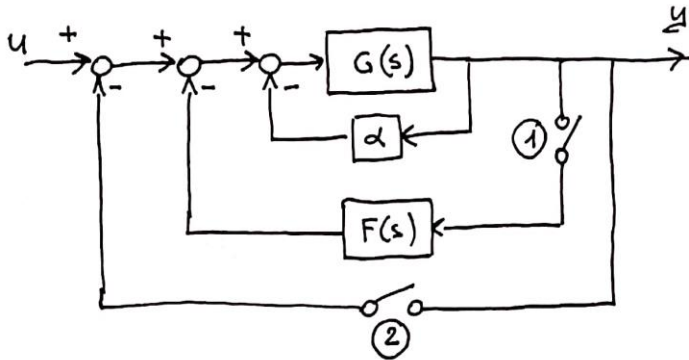
- * $\varphi_m = \pi - |\varphi_c| \approx -\frac{\pi}{2} < 0$ il sistema di controllo è
 INSTABILE

Domanda 3 – 8 punti

Si consideri il sistema in figura, nel quale $G(s)$ e $F(s)$ sono le seguenti funzioni di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 1} \quad F(s) = \frac{1}{s + 1}$$

mentre α è un parametro reale ($-\infty < \alpha < +\infty$).



Gli interruttori 1 e 2 vengono aperti e chiusi indipendentemente, ma non possono mai essere entrambi chiusi: sono quindi ammesse tre configurazioni (1 aperto e 2 aperto; 1 aperto e 2 chiuso; 1 chiuso e 2 aperto).

Determinare per quali valori di α è garantita la asintotica stabilità del sistema in tutte le configurazioni ammissibili.

① aperto e ② aperto:

$$H_1(s) = \frac{G}{1 + \alpha G} = \frac{\frac{s}{s^2 + 2s + 1}}{1 + \alpha \frac{s}{s^2 + 2s + 1}} = \frac{s}{s^2 + (2 + \alpha)s + 1}$$

(n=2), AS. STAB $\Leftrightarrow \alpha_i > 0 \forall i$
 $\alpha > -2$

① aperto e ② chiuso:

$$H_2 = \frac{H_1}{1 + H_1} = \frac{\frac{s}{s^2 + (2 + \alpha)s + 1}}{1 + \frac{s}{s^2 + (2 + \alpha)s + 1}} = \frac{s}{s^2 + (3 + \alpha)s + 1}$$

$\alpha > -3$

① chiuso e ② aperto:

$$H_3 = \frac{H_1}{1 + FH_1} = \frac{\frac{s}{s^2 + (2 + \alpha)s + 1}}{1 + \frac{1}{s+1} \cdot \frac{s}{s^2 + (2 + \alpha)s + 1}} = \frac{s(s+1)}{s^3 + (3 + \alpha)s^2 + (4 + \alpha)s + 1}$$

(n=3) Hurwitz: AS. STAB $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_i > 0 \forall i \\ \alpha_1 \alpha_2 > \alpha_3 \end{cases}$

$\alpha > -3$
 $\alpha > -4$
 $(3 + \alpha)(4 + \alpha) > 1 \Rightarrow \alpha^2 + 7\alpha + 11 > 0 \Rightarrow \alpha > -2.38, \alpha < -4.62$
 \rightarrow quindi H_3 as. stab. per $\alpha > -2.38$

Prendendo l'intersezione dei tre insiemi,

La stabilità asintotica è garantita per $\boxed{\alpha > -2}$.

RISPONDERE RIPORTANDO SUL FOGLIO LA SEQUENZA CORRETTA, CON "0" PER RISPOSTA NON DATA. Esempio: 1 - 3 - 0 - 2

Domanda 4 – 4 punti

*Scegliere (senza giustificare) la risposta esatta. Vi è una sola risposta esatta per ogni quesito.
(risposta esatta = +1, risposta errata = -0.5, risposta non data = 0)*

Un sistema lineare a tempo continuo completamente raggiungibile e completamente osservabile ha funzione di trasferimento pari a

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + 0.1s + 4}$$

Se ad esso viene applicato un ingresso costante non nullo, per ogni condizione iniziale

- ☒ [1] l'uscita tende a un valore costante.
- ☐ [2] l'uscita non tende ad alcun limite.
- ☐ [3] l'uscita tende a infinito.
- ☐ [4] non vi è sufficiente informazione per studiare il comportamento asintotico dell'uscita.

Se ad esso viene applicato un ingresso sinusoidale con pulsazione pari a 2, la sua uscita tende

- ☐ [1] ad un segnale sinusoidale con pulsazione pari a 2 e ampiezza pari all'ampiezza del segnale di ingresso.
- ☐ [2] ad un segnale sinusoidale con pulsazione pari a 2 e ampiezza inferiore all'ampiezza del segnale di ingresso.
- ☒ [3] ad un segnale sinusoidale con pulsazione pari a 2 e ampiezza superiore all'ampiezza del segnale di ingresso.
- ☐ [4] ad un segnale costante di valore superiore all'ampiezza del segnale di ingresso.

Un sistema lineare ha risposta allo scalino pari a $y_{sca}(t) = e^{-t} - e^{-2t}$. La funzione di trasferimento che caratterizza il sistema è pari a

- ☐ [1] $G(s) = \frac{s}{(1+s)(1+2s)}$
- ☐ [2] $G(s) = \frac{1}{(1+s)(2+s)}$
- ☒ [3] $G(s) = \frac{s}{(1+s)(2+s)}$
- ☐ [4] $G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+2s)}$

Un sistema di controllo, di cui si è verificata l'asintotica stabilità, è caratterizzato dalla funzione di trasferimento di anello

$$L(s) = \frac{100}{(1 + 100s)(1 + s)(10 + s)}$$

Il tempo di risposta del sistema di controllo è pari a

- ☐ [1] 0.5
- ☐ [2] 5
- ☒ [3] 50
- ☐ [4] 500

Domanda 5 – 2 punti

Sia dato il sistema lineare a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

Si scriva la soluzione esplicita per il vettore di stato $x(t)$ (formula di Lagrange) corrispondente a stato iniziale $x(0)$ e funzione di ingresso $u(t)$.

Si evidenzii il movimento libero $x_L(t)$, il movimento forzato $x_F(t)$ e la matrice di transizione $\Phi(t)$.

Infine, con riferimento all'equazione di stato

$$\dot{x}(t) = -5x(t) + 10$$

e stato iniziale pari a 10, rappresentare graficamente l'evoluzione nel tempo di $x_L(t)$, $x_F(t)$ e $\Phi(t)$.

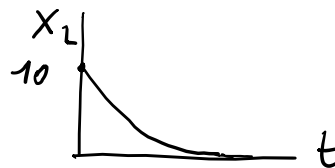
Formula di Lagrange

$$x(t) = \underbrace{e^{At} x(0)}_{x_L(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\xi)} b u(\xi) d\xi}_{x_F(t)}$$

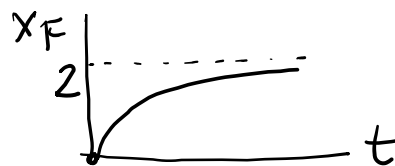
$$\Phi(t) = e^{At}$$

$$\dot{x} = -5x + 10 \Rightarrow A = -5 \quad bu = 10$$

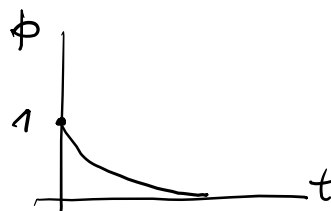
$$x_L(t) = e^{-5t} \cdot 10$$



$$x_F(t) = \int_0^t e^{-5(t-\xi)} \cdot 10 d\xi = 10e^{-5t} \int_0^t e^{5\xi} d\xi = 2(1 - e^{-5t})$$



$$\Phi(t) = e^{-5t}$$



Domanda 6 – 2 punti

Specificare quali comandi occorre digitare per studiare la stabilità del sistema di controllo con funzione di trasferimento di anello

$$L(s) = \frac{10}{(1 + 0.1s)(1 + 10s)}$$

Specificare quali comandi occorrono per valutare il valore massimo, a transitorio esaurito, del segnale in uscita dal sistema di controllo corrispondente al segnale in ingresso

$$u(t) = 10 + 4\sin(30t)$$

```
NUM=10;
DEN=conv([0.1 1],[10 1]);
L=tf(NUM,DEN);
[Gm,Pm,Wcg,Wcp] = margin(L);

H=feedback(L,1);
Valore_massimo=10*bode(H,0)+4*bode(H,30);
```