POLITECNICO
MILANO 1863

SOLUZIONI

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 11/1/2022

COGNOME:_______________________ NOME: _______________________

CODICE PERSONA: _________________________

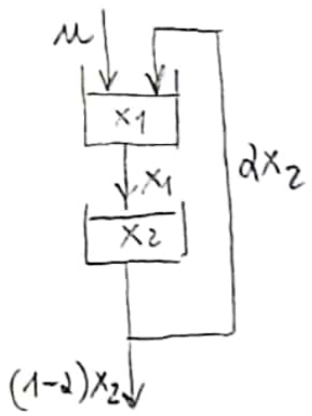
Firma dello studente: _____________________________ Visto del docente:_____

7	7	7	4	5	2	Voto totale 32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1)

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:



$$\dot{x}_1 = u - x_1 + \alpha x_2$$

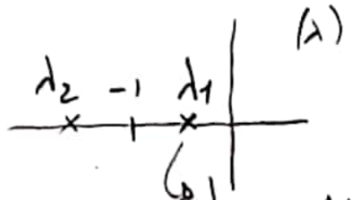
$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2$$

$$A = \begin{vmatrix} -1 & \alpha \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} tr(A) = -2 < 0 \\ det(A) = 1-\alpha > 0 \end{matrix} \quad \to A.S.$$

Equilibrio

$$\begin{matrix} -x_1 + \alpha x_2 + u = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} \bar{x}_1 = \dfrac{1}{1-\alpha}\bar{u} \\ \bar{x}_2 = \bar{x}_1 = \dfrac{1}{1-\alpha}\bar{u} \end{matrix}$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 - \alpha = 0 \qquad \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\alpha}$$



$$\lambda_D = -1 + \sqrt{\alpha}$$

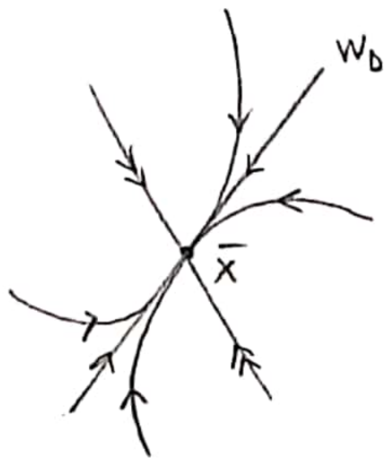
$$Aw = \lambda w$$

$$\begin{vmatrix} -1 & \alpha \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$$

$$-w_1 + \alpha w_2 = \lambda w_1 \quad \to \quad w_2 = \frac{1+\lambda}{\alpha} w_1$$

$$\lambda_1 = -1 + \sqrt{\alpha} \quad \leadsto \quad w_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} w_1 \quad \leadsto w_D$$

$$\lambda_2 = -1 - \sqrt{\alpha} \quad \leadsto \quad w_2 = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} w_1$$



$\lambda_D = -1+\sqrt{\alpha}$

Poiché $0<\alpha<0{,}25 \rightarrow -1<\lambda_D<-0{,}5$ $\quad \left(T_D = -\frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda_D)}\right)$

$1<T_D<2$

$5<T_R<10$ $\quad (T_R = 5\,T_D)$

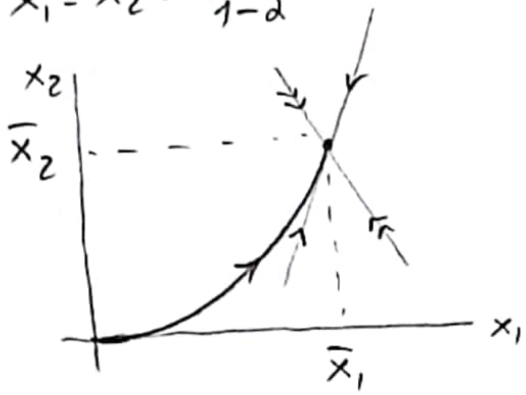
Pertanto, $\forall\alpha$, in al più 10 unità di tempo il sistema raggiunge l'equilibrio

$\boxed{0<t<10}$ $\quad u=\bar{u} \quad \bar{x}_1=\bar{x}_2=\frac{1}{1-\alpha}\bar{u}$

$x_1(0)=x_2(0)=0$

$\dot{x}_1(0)=\bar{u}>0$

$\dot{x}_2(0)=0$

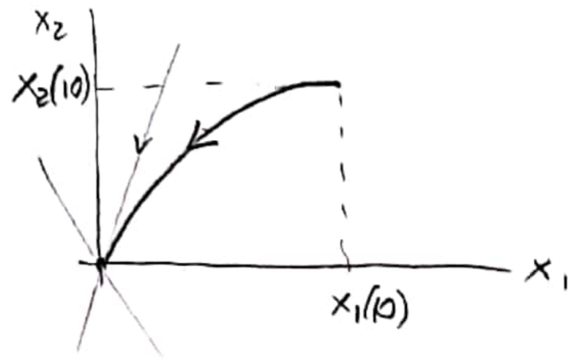


$\boxed{10<t<20}$ $\quad u=0 \quad \bar{x}_1=\bar{x}_2=0$

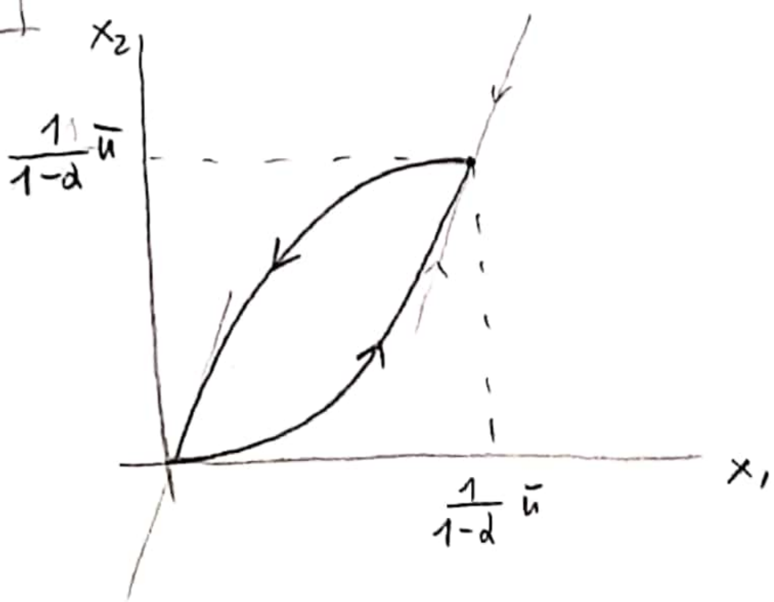
$x_1(10)=x_2(10)=\frac{1}{1-\alpha}\bar{u}$

$\dot{x}_1(0)=-\frac{1}{1-\alpha}\bar{u}+\frac{\alpha}{1-\alpha}\bar{u}=-\bar{u}<0$

$\dot{x}_2(0)=0$



$\boxed{0<t<20}$



2)
Si consideri il seguente sistema a tempo continuo:

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 + u$$

$$y = x_1$$

a) Studiarne la stabilità, la raggiungibilità e l'osservabilità.

b) Progettare un ricostruttore asintotico dello stato tale che l'errore di stima vada a zero (approssimativamente) in 0.5 unità di tempo.

c) Progettare una legge di controllo tale che il sistema controllato (sistema + ricostruttore dello stato progettato al punto precedente + legge di controllo) abbia un tempo di risposta pari (approssimativamente) a 5 unità di tempo.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = b$

$c = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}$

$tr(A) = 2 \rightarrow$ INST

$R = |b \;\; Ab| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad det(R) = 1 \neq 0 \rightarrow CR$

$\theta = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \quad det(\theta) = -1 \neq 0 \rightarrow CO$

b) $l \,/\; tr(A + lc) = 0{,}5 \rightarrow T_D = 0{,}1 \rightarrow \mathbb{R}e(\lambda_D) = -10$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -10$

$A + lc = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + l_1 & -1 \\ 2 + l_2 & 1 \end{vmatrix}$

$tr(A + lc) = 2 + l_1 = -10 - 10 \rightarrow l_1 = -22$

$det(A + lc) = 1 + l_1 + 2 + l_2 = (-10)(-10) \rightarrow l_2 = 119$

$l = \begin{vmatrix} -22 \\ 119 \end{vmatrix}$

c) $T_R(A+bk) = 5 \rightarrow T_D = 1 \rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_D) = -1$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

$$A+bk = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} |k_1 \quad k_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2+k_1 & 1+k_2 \end{vmatrix}$$

$$tr(A+bk) = 2+k_2 = -1-1 \rightarrow k_2 = -4$$

$$det(A+bk) = 1+k_2+2+k_1 = (-1)(-1) \rightarrow k_1 = 2$$

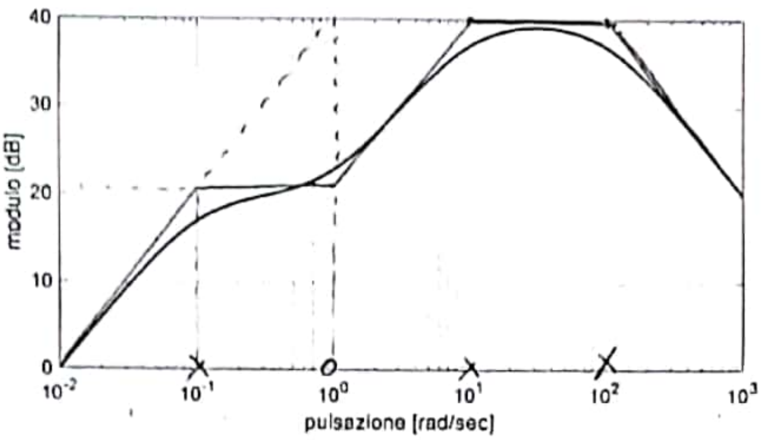
$$k = |2 \quad -4|$$

3)

Mediante una serie di esperimenti si è ricavato il diagramma di Bode del modulo della funzione di trasferimento di un sistema lineare a tempo continuo asintoticamente stabile. Si sa inoltre che la fase del sistema tende a 90° quando la pulsazione ω tende a 0, mentre tende a −270° quando ω tende all'infinito.

× |polo|

o |zero|

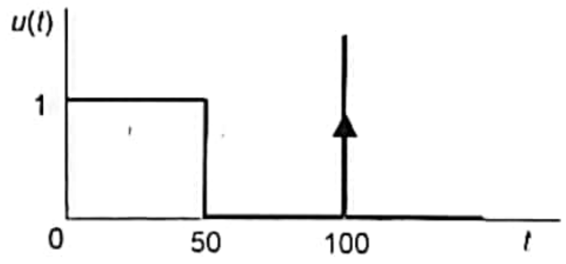


a) Determinare una funzione di trasferimento compatibile con i risultati degli esperimenti. Tracciare il corrispondente diagramma approssimato di Bode della fase.

b) Determinare, ricavando dai diagrammi di Bode (anche approssimati) le informazioni necessarie, l'uscita a transitorio esaurito quando

$$u(t) = -10 + 0.1 sen(30t)$$

c) Determinare (in modo qualitativo) la risposta del sistema all'ingresso rappresentato nella figura seguente (la linea verticale con freccia rappresenta un impulso unitario).



Soluzione (se necessario proseguire sul retro):

a)

zero nell' origine

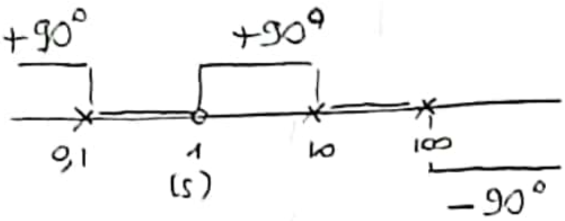
$|\mu|_{dB} = 40$ dB $\to |\mu| = 100 \to \mu = +100$ $\left(\varphi \underset{\omega \to 0}{\to} +90° \right)$

poli AS in −10 , −0,1 , −100

|zero| in 1

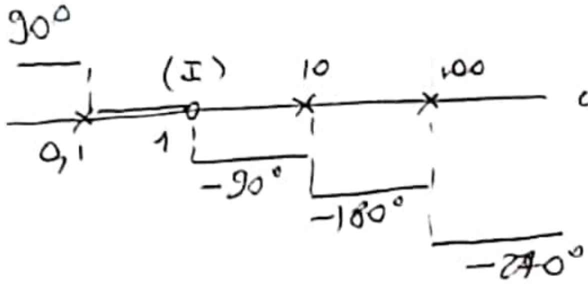
$$G(s) = 100\, s \,\frac{1 \pm s}{(1+10s)(1+0{,}1s)(1+0{,}01s)}$$

zero stabile $(1+s)$ $\quad \varphi = \measuredangle G$



NO

zero instabile $(1-s)$ $\quad \varphi = \measuredangle G$



SI

$$G(s) = 100\, s \,\frac{1-s}{(1+10s)(1+0{,}1s)(1+0{,}01s)}$$

b) $y^{\infty}(t) = -10 \cdot G(0) + 0{,}1\, |G(30i)| \operatorname{sen}(30t + \measuredangle G(30i))$

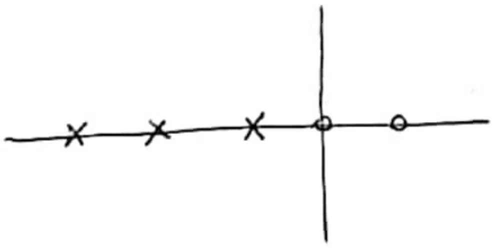
$G(0) = 0 \qquad |G(30i)|_{dB} = 40\ dB \rightarrow |G(30i)| = 100$

$\measuredangle G(30i) = -\pi$

$y^{\infty}(t) = 10 \operatorname{sen}(30t - \pi)$

c) Risposta a scalino $\qquad r = 1 \quad y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = \frac{-100}{0{,}01} < 0$

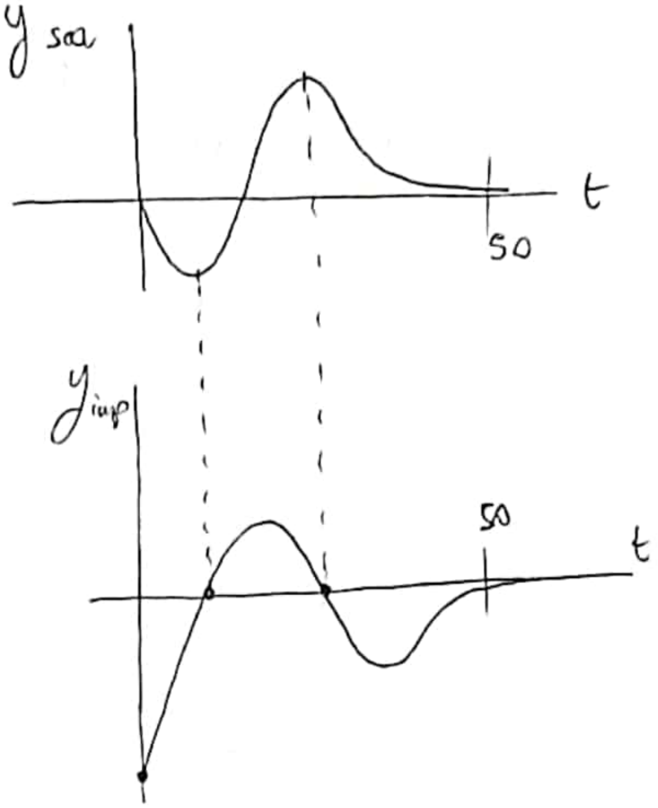
$y_{\infty} = G(0) = 0$



$m_s = 2$

$\delta = 0$ $\Rightarrow N = 2$

$\lambda_D = -0{,}1 \qquad T_D = 10 \qquad T_R = 50$



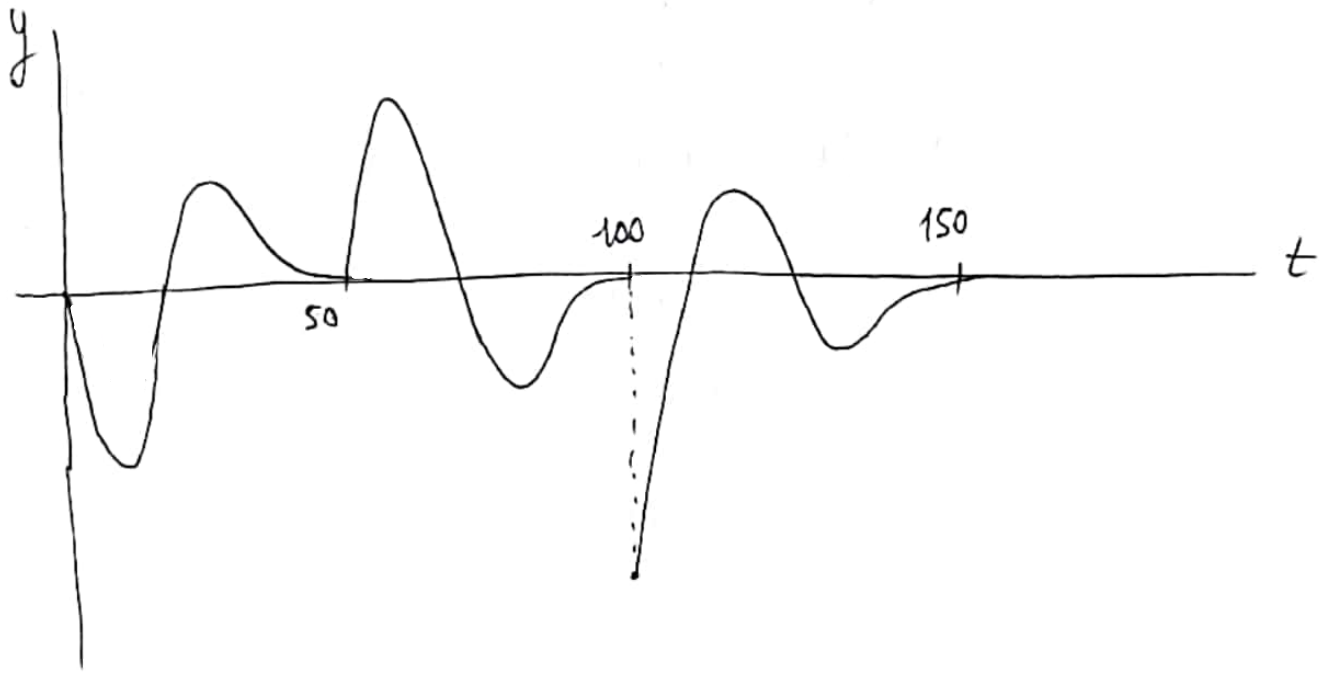
Risposta a impulso

↓

derivata della risposta a scalino

$$y_{imp} = \frac{dy_{sca}}{dt}$$

⇒



4)

Indicare la risposta esatta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione.
(risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)

Gli autovalori di un sistema lineare a tempo continuo sono $\{0, -1, -10\}$.

[1] il sistema è asintoticamente stabile
[2] il sistema è semplicemente stabile
[3] il sistema è instabile
[4] non è possibile affermare nulla sulla stabilità del sistema

Gli autovalori dello Jacobiano di un sistema non lineare a tempo continuo, calcolato nell'intorno di un equilibrio, sono $\{0, -1, -10\}$.

[1] l'equilibrio è asintoticamente stabile
[2] l'equilibrio è stabile ma non asintoticamente stabile
[3] l'equilibrio è instabile
[4] non è possibile affermare nulla sulla stabilità dell'equilibrio

Il sistema lineare con funzione di trasferimento $G(s) = 0.01s/((s+1)(s+2)^2)$ è un filtro

[1] passa basso
[2] passa alto
[3] passa banda
[4] elimina banda

Un sistema di controllo ha funzione di trasferimento d'anello $L(s) = 10/s$. Il sistema di controllo:

[1] è asintoticamente stabile
[2] è semplicemente stabile
[3] è instabile
[4] non è possibile affermare nulla sulla stabilità del sistema di controllo

5)

Il sistema a tempo discreto $x(t+1) = Ax(t) + bu(t)$ si dice "a memoria finita" se il suo movimento libero si azzera in tempo finito per ogni stato iniziale, cioè se esiste $m>0$ (intero) tale che $\phi(m)x(0) = A^m x(0) = 0 \quad \forall x(0)$.

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad , \quad x(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$x(1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} 1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$x(2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} 1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$x(3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} 1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} = x(4) = x(5) = \ldots$$

6) >> sistema = ss(-0,5 , 1 , 0 , 0 , 1)

A b c d → il sistema è a tempo discreto!

>> u = ones(5, 1) → ingresso costante e pari a 1 per 5 unità di tempo

>> t = 0:5 → vettore degli istanti di tempo

>> [y, t, x] = lsim(sistema, u, t) → simulazione; la condizione iniziale (se non specificata) è già supposta nulla!

>> stairs(t, x) → visualizza il grafico