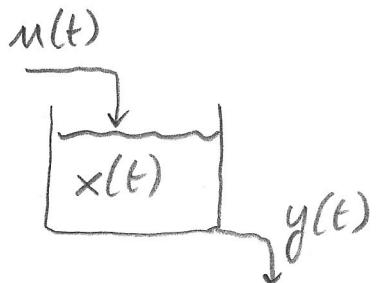


Modello del singolo serbatoio (lego/vasca/...)



Determinare

- esistenza e unicità dell'equilibrio
- stato e uscita di equilibrio
- guadagno

$u(t)$ = portata di ingresso

$x(t)$ = volume di invaso

$y(t)$ = portata di uscita

$$\dot{x}(t) = u(t) - y(t)$$

↓ ↓
 portata portata
 entrante uscente

Nell'ipotesi $y(t) = kx(t)$ si ha:

$$\dot{x}(t) = -kx(t) + u(t)$$

$$y(t) = kx(t)$$

$$A = -k = d$$

$$\boxed{k \neq 0} \rightarrow \lambda \neq 0 \rightarrow \exists! \bar{x} \rightarrow 0 = -k\bar{x} + \bar{u} \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{k} \bar{u}$$

$$\bar{y} = k\bar{x} = \bar{u}$$

$$M = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = 1$$

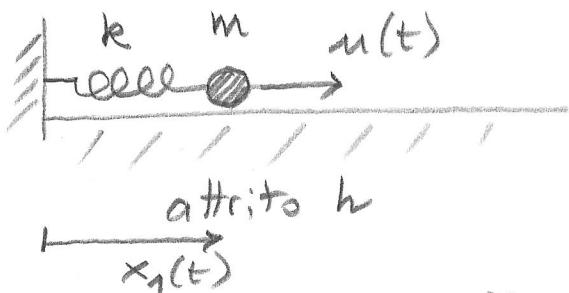
$\boxed{k=0} \rightarrow \lambda=0 \rightarrow$ si perde l'esistenza e unicità dell'equilibrio

Dalla condizione $0 = -k\bar{x} + \bar{u} \xrightarrow{k=0} 0 = \bar{u}$ si ha:

$\bar{u} \neq 0$ ABSURDO $\Rightarrow \nexists \bar{x}$

$\bar{u} = 0$ SEMPRE VERIFICATA $\forall \bar{x} \Rightarrow \exists_{\text{oo}} \bar{x}$

Sistema meccanico : massa-molla con attrito

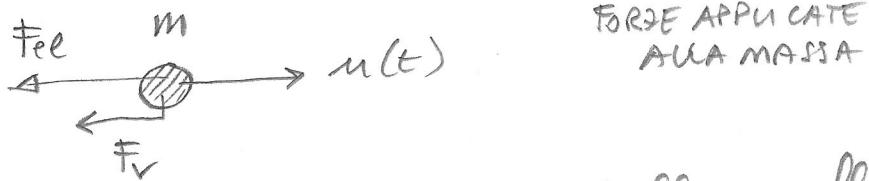


- la massa m è soggetta a
- forza esterna $u(t)$
- forza di richiamo elastica F_{el}
- forza di attrito viscoso F_v

Formulare il modello matematico che descrive l'evoluzione del sistema meccanico. Studiare esistenza e unicità dell'equilibrio. Determinare stato e uscita (posizione della massa) di equilibrio e guadagno.

$x_1(t)$ = posizione della massa all'istante t

$x_2(t)$ = velocità della massa all'istante t



dove $F_{el} = k x_1(t)$ (k = costante elastica della molla)

$F_v = h x_2(t)$ (h = costante di attrito viscoso)

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

→ derivata della posizione nel tempo = velocità

$$\ddot{x}_2(t) = \frac{1}{m} (u(t) - k x_1(t) - h x_2(t)) \rightarrow$$

derivata della velocità nel tempo = accelerazione +

LEGGE DI NEWTON

$m \cdot \text{acceler} = \sum \text{forze applicate}$

$$y(t) = x_1(t)$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{h}{m} \end{vmatrix} \quad \det A = \frac{k}{m}$$

$k \neq 0 \rightarrow \det A \neq 0 \rightarrow \exists ! \bar{x}$
 $(\lambda_i \neq 0 \forall i)$
 $(\exists A^{-1})$

Calcolo \bar{x} imponendo le condizioni all'equilibrio
(t.c. $\rightarrow \dot{\bar{x}} = 0$)

$$0 = \bar{x}_2$$

$$0 = \frac{1}{m}(\bar{u} - k\bar{x}_1 - h\bar{x}_2) \rightarrow \bar{x}_1 = \frac{1}{k}\bar{u} \Rightarrow \bar{x} = \begin{vmatrix} \frac{1}{k}\bar{u} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\bar{y} = \bar{x}_1 = \frac{1}{k}\bar{u} \Rightarrow \mu = \bar{y}/\bar{u} = \frac{1}{k}$$

$R=0 \rightarrow \det A=0 \rightarrow$ si perde l'esistenza e unicità
dell'equilibrio e si ha:
 $(\exists \lambda_i = 0)$
 $(\nexists A^{-1})$

$$0 = \bar{x}_2$$

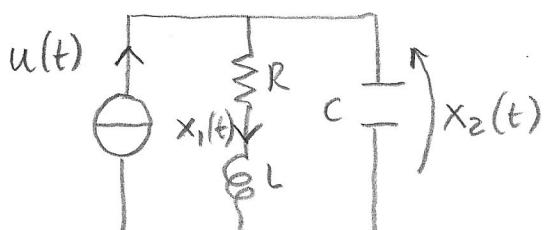
$$0 = \frac{1}{m}(\bar{u} - k\bar{x}_1 - h\bar{x}_2) \rightarrow 0 = \bar{u}$$

$\bar{u} \neq 0 \rightarrow$ assurdo $\Rightarrow \nexists \bar{x}$ qualiasi!

$\bar{u} = 0 \rightarrow$ sempre verificata con $\bar{x} = \begin{vmatrix} \bar{x}_1 \\ 0 \end{vmatrix}$

Rete elettrica

↳ già vista
a lezione



modelli, $\exists! \bar{x}$, calcolo egilibrio, guadagni

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{L} [x_2(t) - Rx_1(t)]$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{C} [u(t) - x_1(t)]$$

$$y(t) = x_2(t)$$

$$A = \begin{vmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{vmatrix} \quad \det A = \frac{1}{LC} \neq 0 \rightarrow \exists! \bar{x}$$

$$0 = \frac{1}{L} (\bar{x}_2 - R\bar{x}_1)$$

$$\rightarrow \bar{x}_1 = \bar{u}$$

$$0 = \frac{1}{C} (\bar{u} - \bar{x}_1)$$

$$\bar{x}_2 = R\bar{u}$$

$$\text{con } \bar{y} = \bar{x}_2 = R\bar{u}$$

$$M = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = R$$

Modello del conto corrente

$x(t) = \infty$ su c.c. nell'anno t

$u(t)$ = prelievi/versamenti nell'anno t

r = tasso di interesse ($r > 0$)

- esistenza e unicità dell'equilibrio
- stato e uscita di equilibrio
- guadagno

$$x(t+1) = x(t) + u(t) + rx(t)$$

$$\hookrightarrow x(t+1) = (1+r)x(t) + u(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

$$A = 1+r = \lambda \quad \text{Poiché } r > 0 \Rightarrow \lambda \neq 1 \Rightarrow \exists ! \bar{x}$$

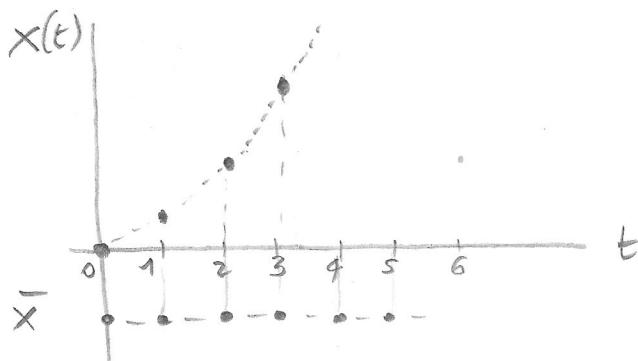
$$\bar{x} = \bar{x} + \bar{u} + r\bar{x} \rightarrow \bar{x} = -\frac{1}{r}\bar{u}$$

$$\bar{y} = -\frac{1}{r}\bar{u} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = -\frac{1}{r}$$

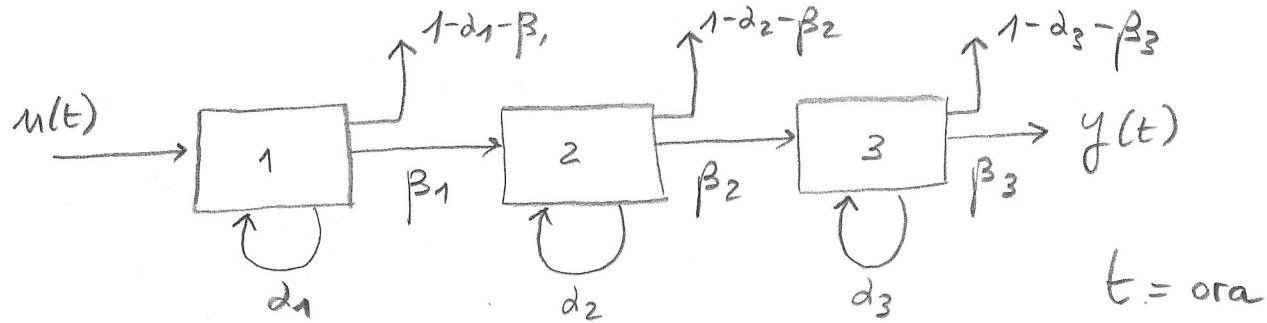
NOTA $\bar{u} > 0 \rightarrow \bar{x} = -\frac{1}{r}\bar{u} < 0 \Rightarrow$ debito costante su c.c.

Se $x(0) = \bar{x} \Rightarrow x(t) = \bar{x} \forall t \rightarrow$ il versamento \bar{u} compense gli interessi $r\bar{x}$ da dare alla banca essendo in debito di \bar{x}

Se $x(0) \neq \bar{x}$, per esempio $x(0) = 0$, $\Rightarrow x(t)$ aumenta "discostando" da \bar{x} . Ciò accade perché il sistema è INSTABILE (si reca più avanti).



Processo produttivo a tre fasi di lavorazione



Controllo di qualità :

d_i = frazione di pezzi in lavorazione nella fase i che dovrà ripetere la fase i

β_i = frazione di pezzi in lavorazione nella fase i che può passare alla fase di lavorazione successiva

$\Rightarrow 1 - d_i - \beta_i$ = frazione di --- che viene scartata

$u(t)$ = nuovi pezzi messi in lavorazione

$y(t)$ = pezzi che hanno finito con successo tutte le fasi di lavorazione

Ogni fase di lavorazione dura un'ora

- Formulare il modello matematico del processo produttivo
- Discutere esistenza e unicità dell'equilibrio
- Calcolare stato e uscita di equilibrio + guadagno

Variabili di stato

$x_i(t)$ = numero di pezzi in lavorazione nella fase i ($i = 1, 2, 3$) nell'ora t

$$x_1(t+1) = \alpha_1 x_1(t) + u(t)$$

$$x_2(t+1) = \beta_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$$

$$x_3(t+1) = \beta_2 x_2(t) + \alpha_3 x_3(t)$$

$$y(t) = \beta_3 x_3(t)$$

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} \quad \lambda_i = \alpha_i \quad i=1,2,3$$

NOTA: E' lecito supporre $\alpha_i < 1 \forall i$
 Infatti, se $\exists \alpha_i = 1 \Rightarrow$ nella fase i \exists solo riciclo e
 la produzione non va avanti! (*)

$$\Rightarrow \lambda_i = \alpha_i \neq 1 \forall i \Rightarrow \exists ! \bar{x}$$

$$\bar{x}_1 = \alpha_1 \bar{x}_1 + \bar{u} \rightarrow \bar{x}_1 = \frac{1}{1-\alpha_1} \bar{u}$$

$$\bar{x}_2 = \beta_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_2 = \frac{\beta_1}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)} \bar{u}$$

$$\bar{x}_3 = \beta_2 \bar{x}_2 + \alpha_3 \bar{x}_3 \rightarrow \bar{x}_3 = \frac{\beta_1 \beta_2}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)} \bar{u}$$

$$\bar{y} = \beta_3 \bar{x}_3 = \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)} \bar{u}$$

$$\frac{\bar{y}}{\bar{u}} = M = \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)}$$

(*)

Vediamo, come esempio, cosa succederebbe se fosse
 $\alpha_1 = 1$ (fase 1 = solo riciclo) $\rightarrow \beta_1 = 0$

$$\alpha_2 < 1$$

$$\alpha_3 < 1$$

Che ci aspetta? le fasi 2 e 3 si "svuotano" $\rightarrow \bar{x}_2 = 0$
 $\bar{x}_3 = 0$

La fase 1, non avendo uscita ($\beta_1 = 0$), accumula peso in burocrazia se $\bar{u} \neq 0$ (\nexists equilibrio) oppure continua a rilavorare gli stessi pesi se $\bar{u} = 0$ (\exists un equilibrio con \bar{x}_1 qualsiasi \rightarrow quelli che c'erano nello stato iniziale del sistema)

In formule:

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_1 + \bar{u} \rightarrow 0 = \bar{u}$$

$$\bar{x}_2 = \alpha_2 \bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_2 = 0$$

$$\bar{x}_3 = \beta_2 \bar{x}_2 + \alpha_3 \bar{x}_3 \rightarrow \bar{x}_3 = 0$$

Se $\bar{u} \neq 0$ ASSURDO $\rightarrow \nexists \bar{x}$

Se $\bar{u} = 0$ sempre verificata $\forall \bar{x}_1 \rightarrow \exists \bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$