Un sistema elettrico è sottoposto a prove per ricavarne la funzione di trasferimento. Le prove consistono nell'applicare una tensione di ingresso $v_{in}(t)$ e nel rilevare la corrispondente tensione d'uscita $v_{out}(t)$.

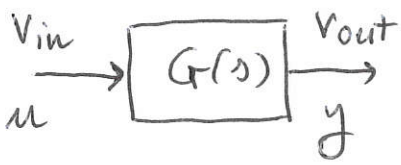
- Prova statica: applicando uno scalino $v_{in}(t) = \bar{v}\text{sca}(t)$, l'uscita $v_{out}(t)$ tende al valore di regime $10\bar{v}$ qualunque sia il valore $\bar{v}$.
- Prova in regime sinusoidale: applicando ingressi sinusoidali di ampiezza unitaria ed aventi varie pulsazioni ω (cioè $v_{in}(t) = \sin(\omega t)$), si sono rilevate l'ampiezza e lo sfasamento dell'uscita a transitorio esaurito ($v_{out}(t) = V\sin(\omega t + \varphi)$):

ω	0.01	10	1000	10 000
V	10	100	10	1
φ	0°	-180°	-270°	-270°

1. Determinare una funzione di trasferimento tra tensione d'ingresso e tensione d'uscita compatibile con i risultati delle prove.
2. Determinare qualitativamente la risposta allo scalino del sistema, discutendo in particolare il tempo di risposta.

---

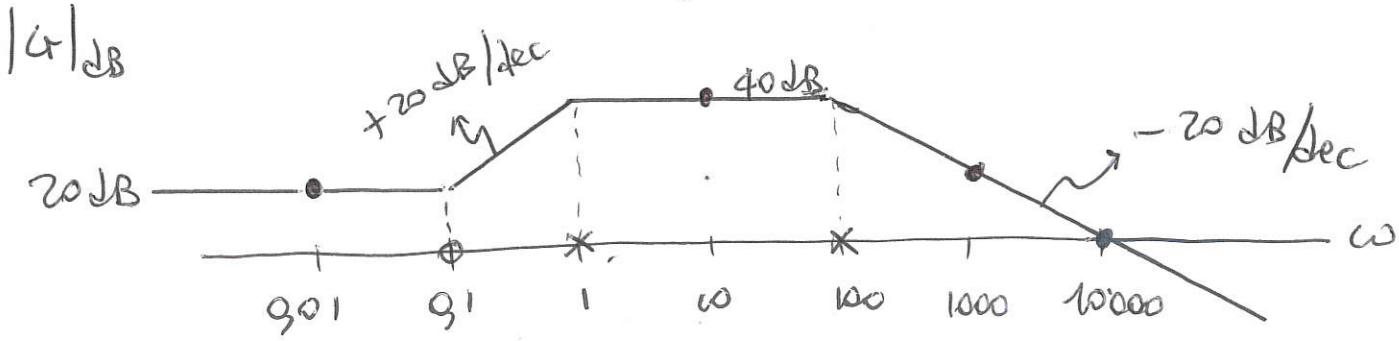
1)



$\bar{u} = \bar{v} \rightarrow \bar{y} = 10\bar{v} = G(0)\bar{v} \Rightarrow G(0) = 10$

$V = |G(i\omega)| \cdot 1 \Rightarrow$

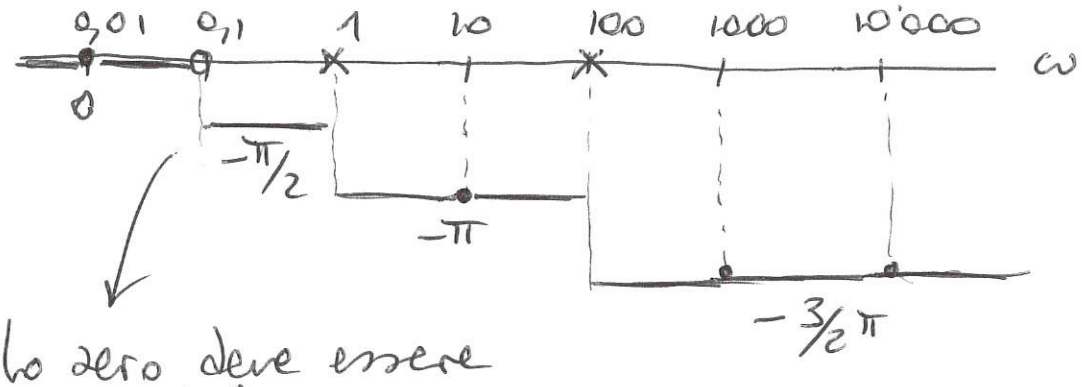
ω	0,01	10	1000	10'000
$\lvert G(i\omega)\rvert$	10	100	10	1
$\measuredangle G(i\omega)$	0	$-\pi$	$-\frac{3}{2}\pi$	$-\frac{3}{2}\pi$
$\lvert G(i\omega)\rvert_{dB}$	20	40	20	0



• = misure o = zeri in 0,1 x = poli in 1 e 100

$$G(s) = \frac{10\,(1 \pm 10s)}{(1+s)(1+0{,}01s)}$$

Per determinare la stabilità dello zero, studio $\measuredangle G$



lo zero deve essere instabile

$$G(s) = \frac{10\,(1 - 10s)}{(1+s)(1+0{,}01s)}$$

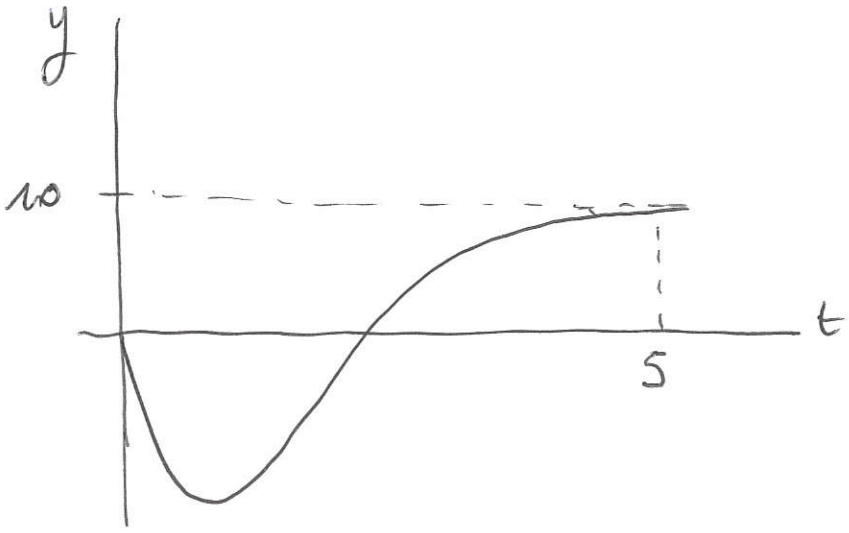
2) $p_1 = -1 \quad p_2 = -100 \rightarrow$ E.S.

$p_D = -1 \quad T_R = 5$

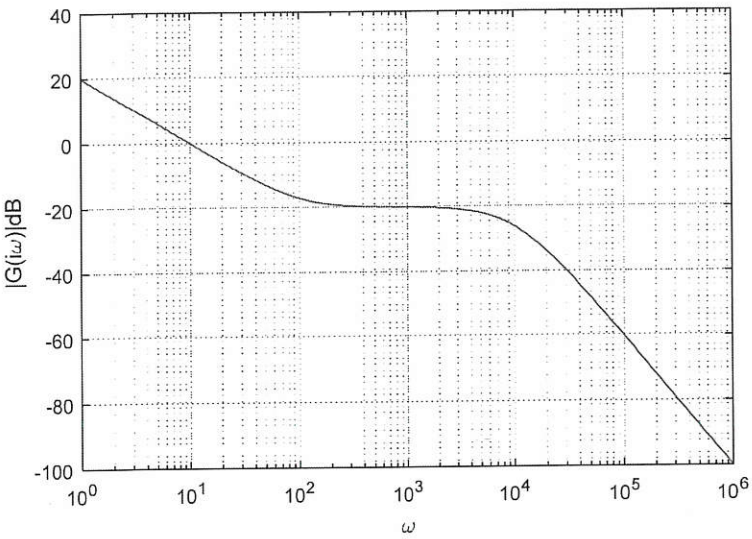
$y_\infty = G(0) = 10$

$r = 1 \quad y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = -\frac{100}{0{,}01} < 0$

$M_s = 1 \quad \sigma = 0 \rightarrow N = 1$



Mediante esperimenti condotti applicando a un sistema segnali sinusoidali a varie frequenze, si è ricavato il seguente diagramma di Bode del modulo

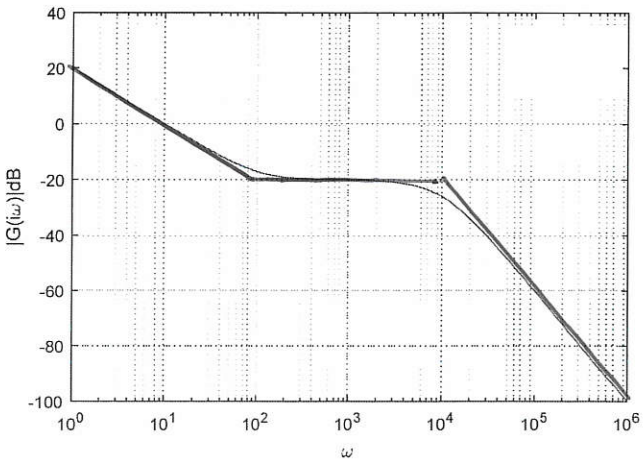


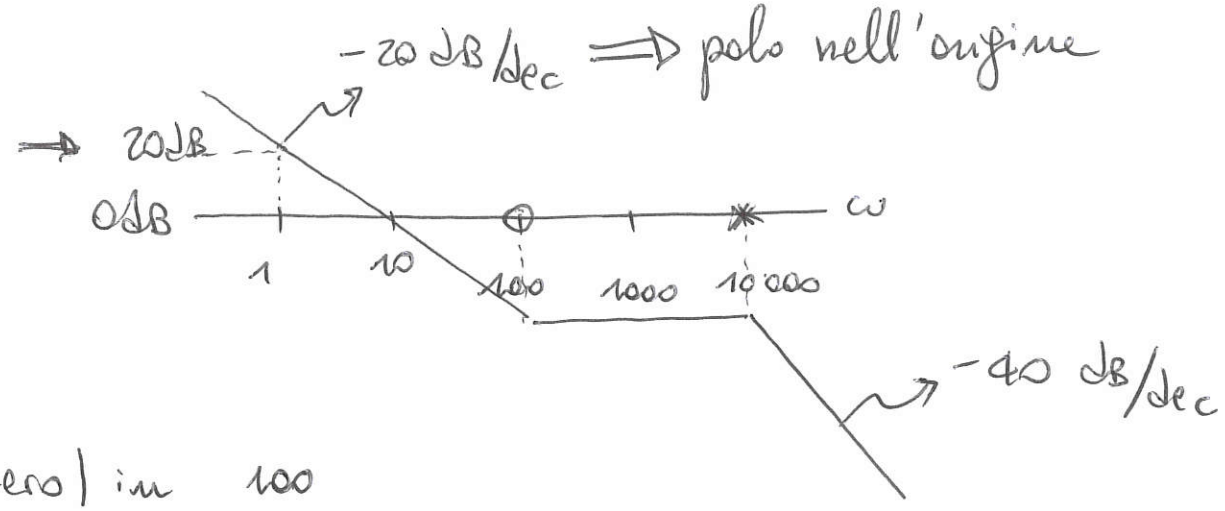
Si è inoltre rilevato che lo sfasamento introdotto dal sistema tende a $-\pi/2$ per $\omega \to 0$ e tende a $-\pi$ per $\omega \to +\infty$.

a) Determinare una funzione di trasferimento compatibile con i risultati degli esperimenti sopra riportati.

b) Determinare (qualitativamente) la risposta all'impulso del sistema, discutendo anche il tempo di risposta e l'eventuale presenza di oscillazioni.

Dal diagramma di Bode esatto ricavo il diagramma approssimato



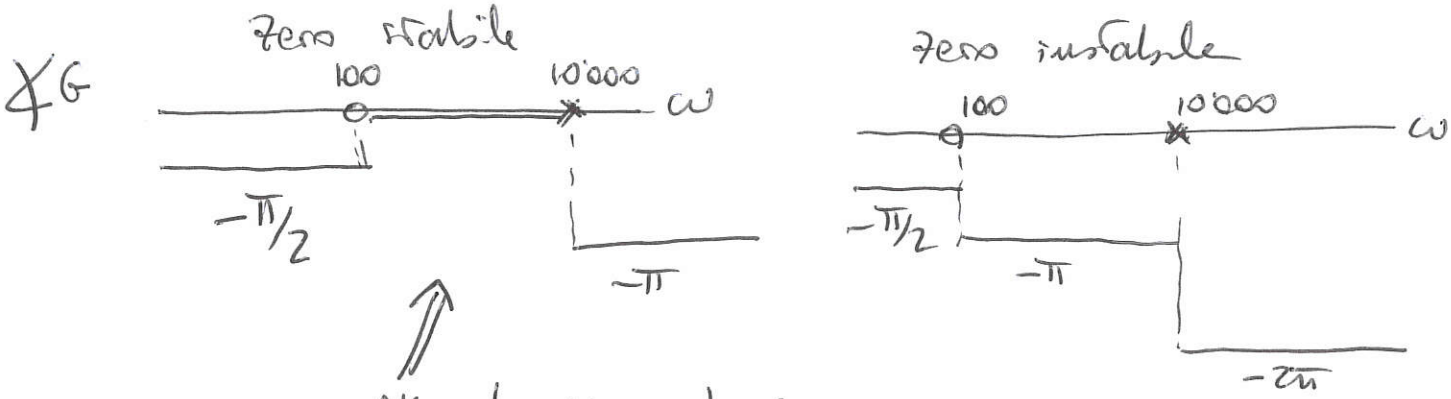


|zero| in 100

|poli| in 10^4 → sono 2.

$M_{dB} = 20\ dB \rightarrow \mu = 10$

$$G(s) = \frac{10\,(1 \pm 10^{-2} s)}{s\,(1 + 10^{-4} s)^2}$$



OK: lo zero deve essere stabile

$$\Rightarrow G(s) = \frac{10}{s}\,\frac{1 + 10^{-2} s}{(1 + 10^{-4} s)^2} = \frac{1}{s} \cdot \underbrace{\frac{10\,(1 + 10^{-2} s)}{(1 + 10^{-4} s)^2}}_{\tilde{G}}$$

Risposta all'impulso di G = Risposta a scalino di $\tilde{G}$

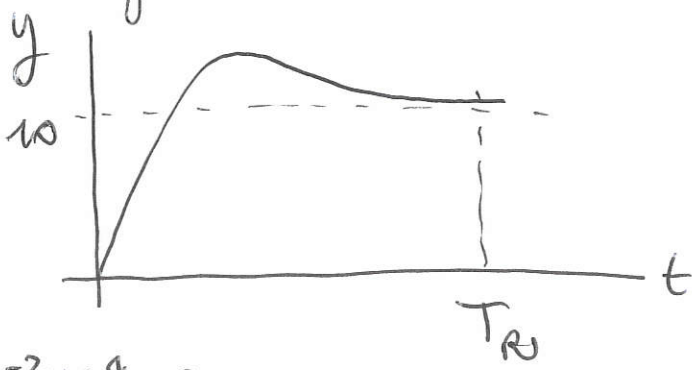
$p_D = -10^4 \quad T_R = 5 \cdot 10^{-4}$

$p_i \in \mathbb{R} \rightarrow \nexists\, \infty$ oscill

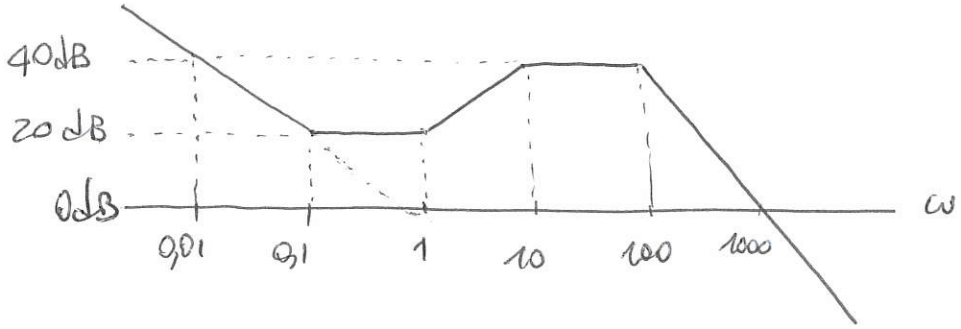
$y_\infty = \tilde{G}(0) = 10$

$m_s = 1 \quad \delta = 0 \rightarrow N = 1$

$r = 1 \rightarrow y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = 10 \cdot 10^{-2} \cdot 10^4 > 0$



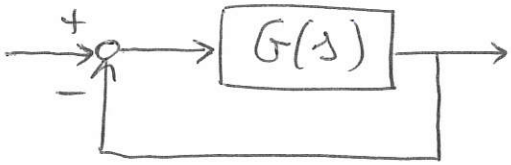
Mediante prove sperimentali su un sistema, si è ricavato il diagramma di Bode del modulo riportato in figura. Si è inoltre rilevato che lo sfasamento introdotto tende a -2π quando $\omega \to \infty$.



a) Determinare una funzione di trasferimento $G(s)$ compatibile con le prove sperimentali

b) Determinare qualitativamente e rappresentare graficamente la risposta all'impulso del sistema.

c) Discutere la stabilità del sistema rappresentato in figura



---

a) Alle basse frequenze:

- pendenza $= -20$ dB/dec $\to$ polo nell'origine
- $\omega = 1 \to \mu_{dB} = 0$ dB $\to \mu = 1$ supponiamo, ad esempio,

|zero| in 0,1 e 1

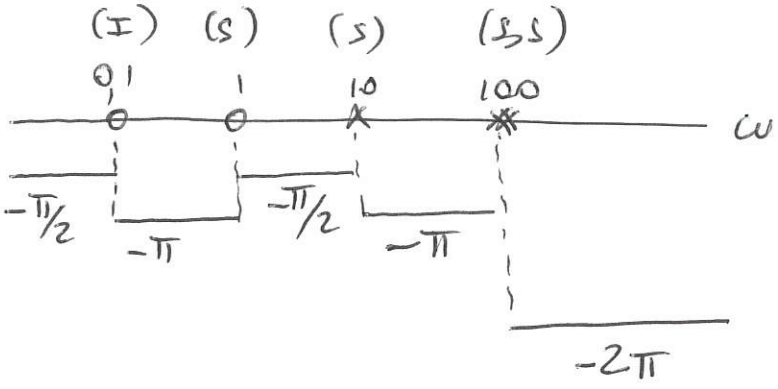
|polo| in 10, $\underbrace{100, 100}$

per $\omega > 100$ la pendenza è -40 dB/dec

$\Rightarrow$ in 100 ho 2 poli

$$G(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{(1 \pm s)(1 \pm 10s)}{(1+0{,}1s)(1+0{,}01s)^2}$$

$\measuredangle G$



→ compatibile con $\varphi \xrightarrow[\omega \to \infty]{} -2\pi$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{s} \frac{(1-10s)(1+s)}{(1+0{,}1s)(1+0{,}01s)^2} = \frac{1}{s}\tilde{G}$$

b) Risposta a impulso di G = Risposta a scalino di $\tilde{G}$

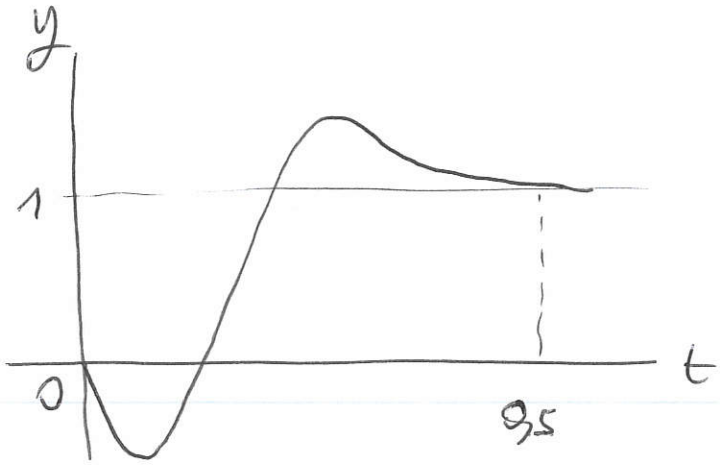
$p_1 = -10 \quad p_2 = -100 \rightarrow$ ES

$p_i \in \mathbb{R} \rightarrow \nexists\, \infty$ oscill

$p_D = -10 \quad T_R = \frac{5}{10} = 0{,}5$

$r = 1 \rightarrow y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) < 0$

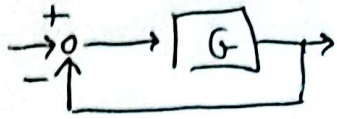
$m_s = 2 \quad \delta = 0 \rightarrow N = 2$



$y_\infty = \tilde{G}(0) = 1$

c)

$$G(s) = \frac{1}{s}\,\frac{(1-10s)(1+s)}{(1+0{,}1s)(1+0{,}01s)^2}$$



(*)

$H(s) = \dfrac{G(s)}{1+G(s)}$ ha denominatore dato da

$$s(1+0{,}1s)(1+0{,}01s)^2 + (1-10s)(1+s) =$$

$$= s(1+10^{-1}s)(10^{-4}s^2 + 2\cdot 10^{-2}s + 1) + (1+s-10s-10s^2) =$$

$$= 10^{-5}s^4 + s^3(10^{-4} + 2\cdot 10^{-3}) + s^2\underbrace{(2\cdot 10^{-2} + 10^{-1} - 10)}_{<0} + \cdots$$

$<0 \Rightarrow$ il sistema (*) NON è asint. stabile

(<u>NOTA</u>: a t. continuo, dato

$\Delta_A(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n$

si ha: A as. stab $\Rightarrow a_i > 0 \ \forall i$

Pertanto, se $\exists i : a_i \leq 0 \Rightarrow$ A NON è as. stab)

In alternativa (e più semplicemente), è possibile considerare il sistema (*) come un sistema di controllo con $G(s) = L(s)$ per il quale è possibile studiarne la stabilità con il criterio di Bode (vedi esercitazione successiva)

Il criterio è applicabile perché

- L è propria
- $|L|_{dB} \cap ! \ 0\ dB$
- L non ha poli a parte reale positiva

Pertanto,

- ω_c è / $|L(i\omega_c)| = 1 \rightarrow |L(i\omega_c)|_{dB} = 0\,dB$

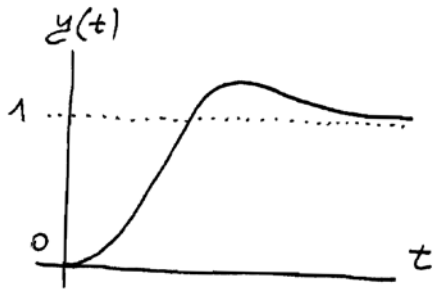
$\Rightarrow \omega_c = 1000$

- $\varphi_c = \measuredangle L(i\omega_c) = \measuredangle L(1000\,i) \cong -2\pi$

$\varphi_m = \pi - |\varphi_c| = \pi - |-2\pi| = -\pi$

Poiché $\varphi_m < 0 \rightarrow$ il sistema di controllo è instabile

3) La risposta allo scalino rilevata sperimentalmente su un sistema è quella riportata in figura. Si sono inoltre eseguite tre rilevazioni sperimentali applicando ingresso sinusoidale del tipo $u(t) = Usin(\omega t)$ alle frequenze $\omega = 0.01; 10;\ 10^4$, ottenendo rispettivamente i valori 1; 10; 0.01 del rapporto di ampiezza uscita/ingresso a regime.

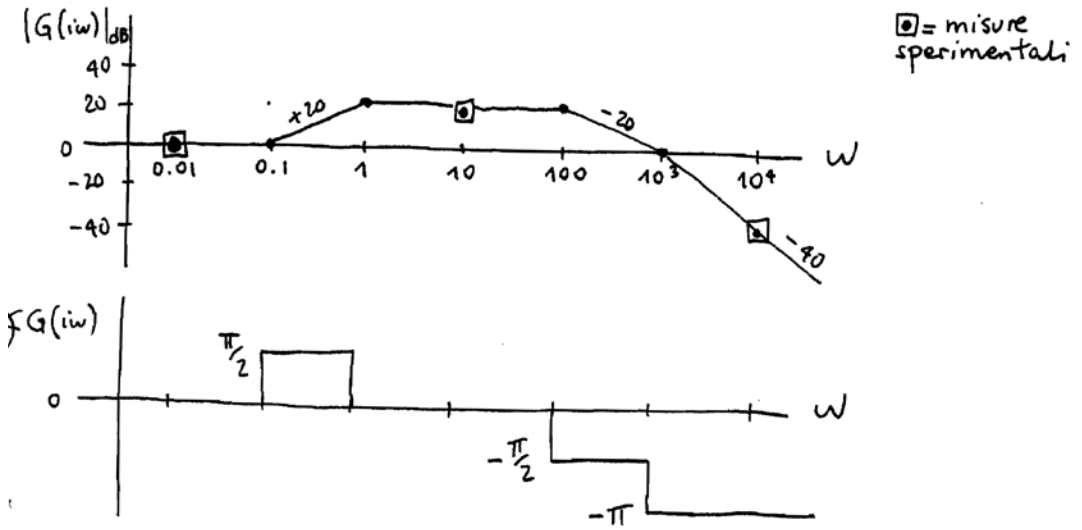


a) Determinare una funzione di trasferimento $G(s)$ compatibile con le prove sperimentali, tracciandone inoltre i diagrammi di Bode di modulo e fase.
b) Determinare in modo qualitativo, e rappresentare graficamente, la risposta all'impulso del sistema.
c) Discutere la stabilità del sistema ottenuto con retroazione (negativa) unitaria di $G(s)$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $\dot{y}(0) = 0$, quindi $r \geq 2$. Esiste uno zero superiore (1 estremo), quindi $n \geq 3$. Una possibile $G(s)$ sarà del tipo:

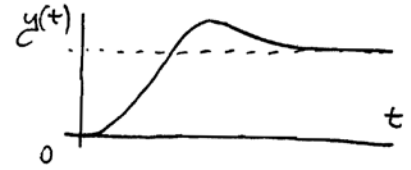
$$G(s) = \mu \frac{(1+s\tau)}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)}, \quad \text{con } \mu = 1.$$



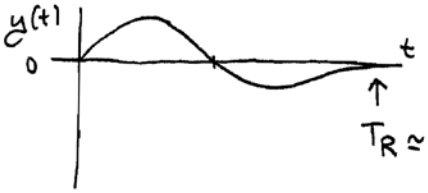
Una $G(s)$ compatibile con tutte le prove sperimentali è:

$$G(s) = \frac{(1+10s)}{(1+s)(1+0.01s)(1+0.001s)}$$

b) Derivo graficamente la risposta allo scalino:



$u(t) = \text{sca}(t)$



$u(t) = \text{imp}(t)$

$T_R \simeq 5T_0 = 5$

c) Posso usare il criterio di Hurwitz (*) per studiare la stabilità di $H(s) = G(s)/(1+G(s))$, oppure il criterio di Bode, poiché:

a) i poli di $G(s)$ hanno tutti $Re(p) > 0$

b) $|G(i\omega)| = 1$ solo in $\omega = 10^3 = \omega_c$ (NB: per $\omega \to 0$ $|G(i\omega)| \to 1$ ma la raggiunge solo asintoticamente)

Allora:

1) $\mu > 0$

2) $\varphi_m = \pi - |\varphi_c| \simeq \pi - |-135°| \simeq 45° > 0$

$\Rightarrow H(s)$ è asintoticamente stabile.

(*) Hurwitz $(n=3)$ → vedi pagina successiva

(*) $H(s)$ ha denominatore

$$(1+s)(1+0{,}01s)(1+0{,}001s)+(1+10s) =$$

$$= 10^{-5}s^3 + s^2(10^{-5}+10^{-2}+10^{-3}) + s(1+10^{-2}+10^{-3}+10)+2$$

$$\alpha_1 = (10^{-5}+10^{-2}+10^{-3})10^5 > 0 \quad \rightsquigarrow \alpha_1 > 10^{-2}\cdot 10^5 = 10^3$$

$$\alpha_2 = (1+10^{-2}+10^{-3}+10)\,10^5 > 0 \quad \rightsquigarrow \alpha_2 > 10\cdot 10^5 = 10^6$$

$$\alpha_3 = 2\cdot 10^5 > 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1\alpha_2 > 10^3\cdot 10^6 = 10^9 > \alpha_3 = 2\cdot 10^5 \Rightarrow H(s) \text{ è as. stab.}$$