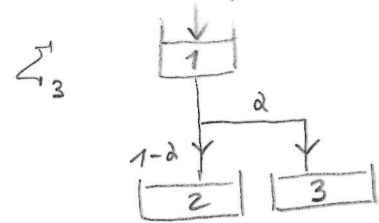
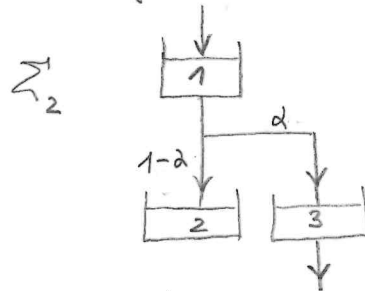
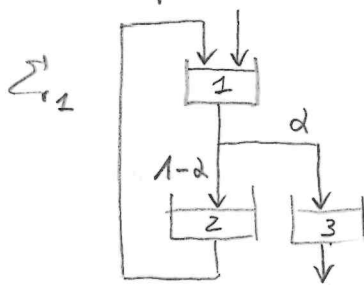


Si studi la stabilità dei seguenti sistemi idrici specificandone, dove esiste, il tempo di risposta.

Si supponga che la costante di deflusso di ciascun serbatoio sia pari a 1 e che la ripartizione delle portate sia definita da $d \in [0,1]$



Σ_1

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= M + X_2 - X_1 \\ \dot{X}_2 &= (1-d)X_1 - X_2 \\ \dot{X}_3 &= dX_1 - X_3 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1-d & -1 & 0 \\ d & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A_{11}
 A_{22}

$$\det(\lambda I - A_{11}) = \det \begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 \\ d-1 & \lambda+1 \end{bmatrix} = (\lambda+1)^2 + d - 1 = \lambda^2 + 2\lambda + d = 0$$

$$\hookrightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{1-d}$$

$$\sigma_A = \{\lambda_i\}_A = \{-1 - \sqrt{1-d}, -1 + \sqrt{1-d}, -1\}$$

• $d=0$ $\lambda_1 = -2$ $\lambda_2 = 0$ $\lambda_3 = -1$

$\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0 \quad \forall i$ ed $\exists i: \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0 \rightarrow \lambda_2 = 0$

$\lambda_2 = 0$ è radice semplice di $\Delta_A \rightarrow$ è radice semplice di ψ_A

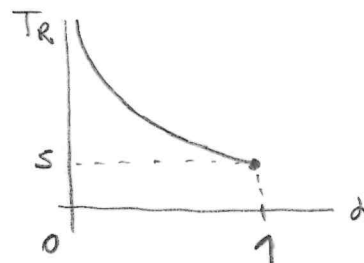
semplice stabile

• $d \in (0,1]$ $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall i \Rightarrow$ Asintoticamente stabile

$$\lambda_D = -1 + \sqrt{1-d}$$

$$T_D = -\frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda_D)} = \frac{1}{1 - \sqrt{1-d}}$$

$$T_R = 5T_D = \frac{5}{1 - \sqrt{1-d}}$$



NOTA 1

$$\min_d (T_R) = 5 \quad \text{per } d=1$$

$\downarrow$
 T_R del singolo serbatoio

NOTA 2

$$d \rightarrow 0 \quad \lambda_D \rightarrow 0 \quad T_R = -\frac{5}{\operatorname{Re}(\lambda_D)} \rightarrow \infty$$

$$\sum_2 \begin{aligned} \dot{x}_1 &= 11 - x_1 \\ \dot{x}_2 &= (1-\alpha)x_1 \\ \dot{x}_3 &= \alpha x_1 - x_3 \end{aligned} \quad A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\{\lambda_i\}_A = \{-1, -1, 0\}$$

$\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0 \quad \forall i$ ed $\exists i: \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0$
 $\lambda_3 = 0$ è radice semplice del $\Delta_A \rightarrow$ anche del ψ_A $\rightarrow$ semplice stabile

$$\sum_3 \begin{aligned} \dot{x}_1 &= 11 - x_1 \\ \dot{x}_2 &= (1-\alpha)x_1 \\ \dot{x}_3 &= \alpha x_1 \end{aligned} \quad A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\{\lambda_i\}_A = \{-1, 0, 0\} \quad \operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0 \quad \forall i$ ed $\exists i: \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$
 $\rightarrow$ occorre valutare se $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ è radice semplice o multipla in ψ_A

ipotesi $\psi_A(\lambda) = (\lambda+1)\lambda$

$$\psi_A(A) = (A+I)A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-\alpha & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \checkmark$$

Pertanto $\lambda = 0$ è radice semplice in $\psi_A \rightarrow$ semplice stabile

NOTA Tutte le reti idriche mostrate nel testo, se non alimentate, hanno volumi di invaso che possono o tendere a 0 oppure rimanere su un valore limitato $\Rightarrow$ le reti possono essere solo o asint. stabili o semplicemente stabili.

Si studi la stabilità dei seguenti sistemi a tempo continuo specificandone, dove esiste, il tempo di risposta.

Nota per i modelli dati in forma I/O si suppone che $\{\text{poli}\} \equiv \{\text{autovalori}\}$

Σ_1

$$A = \begin{array}{c|cc} & \begin{matrix} A_{11} \end{matrix} & \\ \hline \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{matrix} & \begin{matrix} A_{22} \end{matrix} \end{array}$$

A è triangolare a blocchi

$$\{\lambda\}_A = \{\lambda\}_{A_{11}} \cup \{\lambda\}_{A_{22}}$$

$$A_{11} \rightarrow \det(\lambda I - A_{11}) = \det \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 2 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{SARRUS}}{=} \lambda^2(\lambda+2) + 2 + \lambda = (\lambda+2)(\lambda^2+1) = 0$$

$$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = i \quad \lambda_3 = -i$$

(In alternativa: A_{11} è in forma canonica di controllo
 $\Rightarrow \Delta_{A_{11}} = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2 = \lambda^2(\lambda+2) + \lambda + 2 = (\lambda+2)(\lambda^2+1)$)

$$A_{22} \rightarrow \det(\lambda I - A_{22}) = \det \begin{vmatrix} \lambda-1 & 5 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1) + 5 = \lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_4 = 2i \quad \lambda_5 = -2i$$

$$\{\lambda\}_A = \{-2, +i, -i, +2i, -2i\}$$

- $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0 \quad \forall i$ ed $\exists i : \text{Re}(\lambda_i) = 0 \rightarrow$ sono $\lambda_2 \dots \lambda_5$
 - Tutti gli autovalori con $\text{Re} = 0$ sono radici semplici di $\Delta_A \rightarrow$ sono radici semplici di Ψ_A
- } $\rightarrow$ sempli
stabil

Σ_2

$$A = \begin{array}{c|cc} & \begin{matrix} A_{11} \end{matrix} & \\ \hline \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} A_{22} \end{matrix} \end{array}$$

A è triangolare a blocchi

$$\{\lambda\}_A = \{\lambda\}_{A_{11}} \cup \{\lambda\}_{A_{22}}$$

$$A_{11} \rightarrow \det(\lambda I - A_{11}) = \det \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -3 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+2) + 3 = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{22} \rightarrow \det(\lambda I - A_{22}) = \det \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2) - 1 - (\lambda+1) =$$

$$= \lambda(\lambda+1)(\lambda+2) - (\lambda+2) = (\lambda+2)(\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_3 = -2 \quad \lambda_4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \lambda_5 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\{\lambda\}_A = \left\{ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, -2, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right\}$$

$\downarrow$
 $\text{Re} < 0$

$\ominus \quad \oplus \quad \ominus$

Poiché $\exists \lambda_i$ con $\text{Re}(\lambda_i) > 0 \Rightarrow$ instabile

$\sum_3$

$$A = \begin{vmatrix} \overset{A_{11}}{2} & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \underset{A_{22}}{-1} \end{vmatrix}$$

$$A_{11} \rightarrow \det(\lambda I - A_{11}) = \det \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 \\ -2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+2) + 4 = \lambda^2 = 0 \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix}$$

$$\{\lambda\}_A = \{0, 0, -1\}$$

$\text{Re}(\lambda_i) \leq 0 \forall i$ ed $\exists i: \text{Re}(\lambda_i) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ quindi occorre valutare la molteplicità in 4

$$\text{ipotizziamo } \psi_A(\lambda) = \lambda(\lambda+1)$$

$$\psi_A(A) = A(A+I) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \psi_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)$$

$\lambda=0$ è radice multipla di $\psi_A \Rightarrow$ instabilità (debole)

$\sum_4$

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -kx_1 - 3x_2$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -k & -3 \end{vmatrix}$$

$$\text{tr}(A) = -2$$

$$\det(A) = -3+k$$

$$\Delta_A = \lambda^2 + 2\lambda + k - 3$$

$$\lambda_1 = -1 - \sqrt{4-k}$$

$$\lambda_2 = -1 + \sqrt{4-k}$$

• $k > 4 \quad \lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \quad \text{Re}(\lambda_{1,2}) = -1 < 0 \rightarrow$ Asint. stab

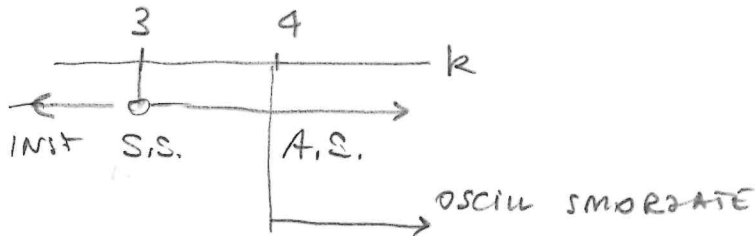
• $k \leq 4$ $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ con $\lambda_1 \leq \lambda_2$

$\lambda_2 = -1 + \sqrt{4-k} < 0$ $4-k < 1$ $k > 3 \rightarrow \lambda_2 < 0 \rightarrow 3 < k \leq 4$ Asint. stab

• $k < 3$ $\lambda_2 > 0 \rightarrow$ Instab

• $k=3$ $\lambda_1 = -2$ $\lambda_2 = 0$

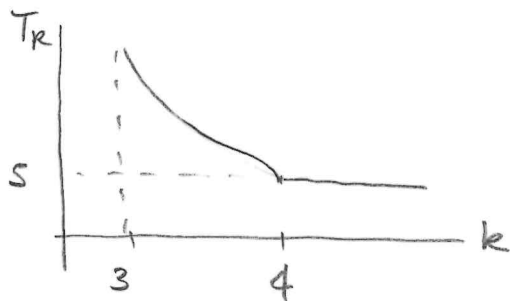
$\rightarrow$ radice semplice $\rightarrow$ semplice stab di $\Delta_A \in \Psi_A$



$k > 3$ | A.S. calcolo T_R

• $k > 4$ $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ $\text{Re}(\lambda_D) = -1$ $T_D = 1$ $T_R = 5$

• $3 < k \leq 4$ $\lambda_D = \lambda_2$ $T_D = \frac{1}{1-\sqrt{4-k}}$ $T_R = \frac{5}{1-\sqrt{4-k}}$



$\sum_{i=1}^n$

$G = \frac{3\lambda + 3}{3\lambda^2 + 7\lambda + 2}$

$3\lambda^2 + 7\lambda + 2 = 0$ $\lambda_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{6} = \begin{cases} -2 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$

$\text{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i \rightarrow$ Asint. stab.

$\lambda_D = -\frac{1}{3}$ $T_D = 3$ $T_R = 15$

$$\sum_6 \quad \ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = 3\dot{u} + u$$

$$(\lambda^2 + 5\lambda + 4)y = (3\lambda + 1)u$$

$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \quad (\lambda + 4)(\lambda + 1) = 0 \quad \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -4$$

$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall i \rightarrow \text{asint. stab}$

$$\lambda_D = -1 \quad T_D = 1 \quad T_R = 5$$

$$\sum_7 \quad \ddot{\ddot{y}} - 7\ddot{y} - 6\dot{y} = \ddot{u} + 2\dot{u} - 15u$$

$$\lambda^3 - 7\lambda - 6 = 0$$

$$\hookrightarrow (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 6) = (\lambda + 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = 3 \rightarrow \exists i: \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0 \rightarrow \text{instab}$$

$$\lambda_3 = -2$$

Verificare l'asintotica stabilità dei seguenti sistemi. Quale dei due tende più rapidamente a regime? (NOTA: per la funzione di trasferimento si supponga che {poli} = {autovalori}).

$$\Sigma_1: A = \begin{bmatrix} -3 & \overset{A_{11}}{-1} & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \underset{A_{22}}{-3} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_2: G(s) = \frac{s^2 + 4s + 4}{s^3 + 14s^2 + 43s + 30}$$

$$\Sigma_1: A_{11} \rightarrow \det(\lambda I - A_{11}) = \det \begin{vmatrix} \lambda + 3 & 1 \\ -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 3)(\lambda + 1) + 2 =$$

$$= \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \pm \sqrt{4 - 5} = -2 \pm i$$

$$\{\lambda\}_A = \{-2 - i, -2 + i, -3\} \quad \operatorname{Re}(\lambda) < 0 \Rightarrow \text{Asint. stab.}$$

$$\lambda_D = -2 \pm i \quad T_D = -\frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda_D)} = \frac{1}{2} \quad T_R = 5T_D = \frac{5}{2}$$

$$\Sigma_2: G(s) = \frac{(s+2)^2}{(s+1)(s+3)(s+10)}$$

$$\{\lambda\} = \{-1, -3, -10\}$$

$$\operatorname{Re}(\lambda) < 0 \Rightarrow \text{Asint. stab.}$$

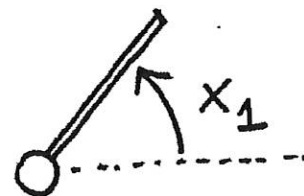
$$\lambda_D = -1 \quad T_D = 1 \quad T_R = 5$$

$$\begin{array}{r|l} s^3 + 14s^2 + 43s + 30 & s+1 \\ \hline s^3 + s^2 & s^2 + 13s + 30 \\ \hline \wedge 13s^2 + 43s + 30 & \\ 13s^2 + 13s & \\ \hline \wedge 30s + 30 & \\ 30s + 30 & \\ \hline \wedge & \end{array}$$

Σ_1 tende più rapidamente a regime

Un braccio meccanico ruota nel piano orizzontale sotto l'azione di una coppia C proporzionale allo scostamento tra posizione angolare desiderata u ed effettiva x_1 :

$$C(t) = k(u(t) - x_1(t))$$



Il braccio ha momento d'inerzia M ed è inoltre soggetto ad attrito viscoso con coefficiente d'attrito h .

a) Scrivere le equazioni di stato e di uscita, considerando come variabile di uscita la posizione angolare del braccio meccanico.

Si pongano, da qui in avanti, $M = 1$, $h = 4$.

b) Discutere la stabilità del sistema per ogni valore di k ($-\infty < k < +\infty$).

a) $x_1 = \text{posizione angolare}$
 $x_2 = \text{velocità angolare}$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{M} (k(u - x_1) - h x_2)$$

$$y = x_1$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{h}{M} \end{vmatrix}$$

b) $M = 1$ $h = 4 \rightarrow A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -k & -4 \end{vmatrix}$ $\text{tr}(A) = -4$
 $\det(A) = k$

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 + 4\lambda + k = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - k}$$

• $k > 0 \Rightarrow \text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0 \Rightarrow \text{A.S.}$

• $k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4 \quad \lambda_2 = 0 \Rightarrow \text{S.S.}$

$\hookrightarrow$ Radice semplice di $\Delta_A \Rightarrow$ radice semplice di φ_A

• $k < 0 \Rightarrow \det(A) = k < 0 \Rightarrow \exists \lambda_i > 0 \Rightarrow \text{INST}$
 $\downarrow$
 $\lambda_1 \cdot \lambda_2$

Matrici a blocchi:

* Diagonale a blocchi

$$A = \begin{array}{c|c|c} & n_1 & n_2 \\ \hline & A_{11} & 0 \\ \hline n, n & \text{---} & \text{---} \\ \hline & 0 & A_{22} \\ \hline & n_1 & n_2 \end{array}$$

costruisce sulla diagonale principale due matrici quadrate. Le matrici (quadrate o rettangolari) costruite sull'antidiagonale hanno tutti elementi nulli.

$$n_1 + n_2 = n$$

$$\{\lambda\}_A = \{\lambda\}_{A_{11}} \cup \{\lambda\}_{A_{22}}$$

* Triangolare a blocchi

sulla diagonale principale: 2 matrici quadrate

sulla anti-diagonale: almeno una matrice (quadrate o rettangolare) di elementi nulli.

$$A = \begin{array}{c|c|c} & n_1 & n_2 \\ \hline & A_{11} & * \\ \hline n, n & \text{---} & \text{---} \\ \hline & 0 & A_{22} \\ \hline & n_1 & n_2 \end{array} \quad \text{oppure} \quad \begin{array}{c|c|c} & n_1 & n_2 \\ \hline & A_{11} & 0 \\ \hline & \text{---} & \text{---} \\ \hline & * & A_{22} \\ \hline & n_1 & n_2 \end{array}$$

$$n_1 + n_2 = n$$

$$\{\lambda\}_A = \{\lambda\}_{A_{11}} \cup \{\lambda\}_{A_{22}}$$

NOTA le tutto si può iterare

$$A = \begin{array}{c|c|c|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}$$

$$\{\lambda\} = \{-3, -2, 4, 1\}$$