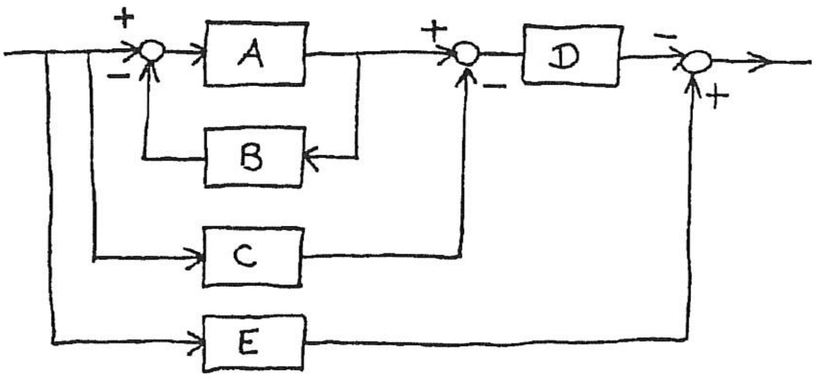
Si consideri il sistema ***a tempo continuo*** rappresentato in figura.



I blocchi A e B sono descritti dalle funzioni di trasferimento $G_A(s) = \dfrac{10}{s-1}$, $G_B(s) = \dfrac{s}{s-2}$, il blocco C è descritto dal modello ingresso/uscita $\ddot{y}_C + \dot{y}_C + 4y_C = -4\dot{u}_C + 2u_C$, il blocco E è descritto dal modello di stato

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Proporre arbitrariamente un blocco D di ordine 2 tale che il sistema aggregato sia asintoticamente stabile.
b) Utilizzando il blocco D proposto, determinare il tempo di risposta del sistema aggregato, discutendo anche l'eventuale presenza di oscillazioni nelle risposte ad ingresso costante.
c) Utilizzando il blocco D proposto, discutere la stabilità del sistema aggregato nel caso il modello ingresso/uscita del blocco C venga sostituito dal seguente:

$$\dddot{y}_C + \ddot{y}_C + \dot{y}_C + 4y_C = -4\dot{u}_C + 2u_C$$

NOTA: $\{\text{poli}\} \equiv \{\lambda\}$ qui

a)

F = retroazione A–B

F, C, E, D sono aggregati con connessioni cascata/parallelo

$\Longrightarrow$ il sistema è asint. stabile $\Longleftrightarrow$ F, C, D ed E sono asintoticamente stabili

(F) $\quad G_F = \dfrac{G_A}{1 + G_A G_B} = \dfrac{\frac{10}{s-1}}{1 + \frac{10}{s-1}\,\frac{s}{s-2}} = \dfrac{10(s-2)}{s^2 + 7s + 2}$

poli in $\dfrac{-7 \pm \sqrt{49-8}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-7+\sqrt{41}}{2} & \ominus \\ \dfrac{-7-\sqrt{41}}{2} & \ominus \end{cases}$ $\quad$ F Asint. stab.

Ⓒ $\Delta_c(s) = s^2 + s + 4$

poli in $\dfrac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+i\sqrt{15}}{2} & \mathrm{Re}(-) \\ \dfrac{-1-i\sqrt{15}}{2} & \mathrm{Re}(-) \end{cases}$ C Asint. stab.

Ⓔ $\{\lambda\}_E = \{-1, -2, -1, -2\}$ E Asint. stabile

partizionata a blocchi

Quindi il sistema è asint. stab. $\Leftrightarrow$ D è asint. stabile

Per esempio $G_D = \dfrac{1}{(s+1)^2}$ ha poli in -1 e -1 ed è asint. stabile.

b) $\{\lambda\}_{\Sigma} = \sigma(\Sigma) = \sigma(F) \cup \sigma(C) \cup \sigma(D) \cup \sigma(E)$

sistema aggregato

$$\sigma(F) = \Big\{ \underbrace{\frac{-7+\sqrt{41}}{2}, \frac{-7-\sqrt{41}}{2}}_{F}, \underbrace{\frac{-1+i\sqrt{15}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{15}}{2}}_{C}, \underbrace{-1, -1}_{D}, \underbrace{-1, -1, -2, -2}_{E} \Big\}$$

$\lambda_D = \dfrac{-7+\sqrt{41}}{2} \longrightarrow T_D = -\dfrac{1}{\mathrm{Re}(\lambda_D)}$ e $T_R = 5T_D \simeq 16,7$

Poiché $\exists\, \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists$ oo oscillazioni

c) $\Delta_c(s) = s^3 + s^2 + s + 4$ $\alpha_1 = 1$ $\alpha_2 = 1$ $\alpha_3 = 4$

Hurwitz $H = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

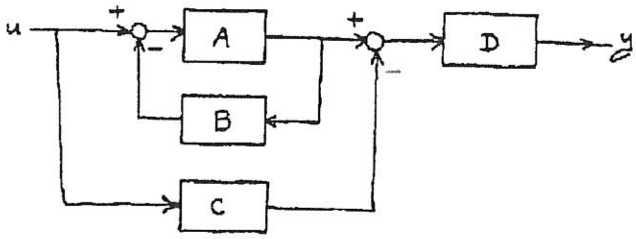
$D_1 = 2 > 0$

$D_2 = -3 < 0 \rightarrow C$ non As. stab $\Rightarrow \Sigma$ non è As. stab

OPPURE, PIÙ RAPIDAMENTE:

→ Hurwitz $n=3$: As. stab. $\Leftrightarrow$ $\alpha_i > 0\ \forall i$ e $\alpha_1 \alpha_2 > \alpha_3$

Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura.



Il blocco A ha funzione di trasferimento $G_A(s) = \dfrac{1}{s-1}$, il blocco D è descritto dal modello I/O $\dot{y}_D + 2y_D = -\dot{u}_D$, il blocco C dal modello di stato seguente:

$$A_{11} \qquad A_C = \left|\begin{array}{c|cc} -1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right| A_{22} \qquad b_C = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad c_C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

a) Proporre, per il blocco B, una qualunque funzione di trasferimento di ordine 1 che renda il sistema aggregato asintoticamente stabile (spiegando con cura perché l'aggregato risulta asintoticamente stabile).
c) Con il blocco B prima proposto, determinare TUTTE le costanti di tempo del sistema aggregato e quindi il suo tempo di risposta.

a) R = retroazione A − B

R, C e D sono connessi in cascata/parallelo.

Pertanto Σ è asint. stabile $\Leftrightarrow$ R, C e D sono asint. stab.

C $\quad \det(\lambda I - A_{22}) = \det \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

$\lambda = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$

$\{\lambda\}_{A_C} = \{\lambda\}_{A_{11}} \cup \{\lambda\}_{A_{22}} = \{-1, -1+i, -1-i\} \Rightarrow$ C è asintot. stabile

D $\quad \Delta_D(s) = s+2$ polo in $-2 \Rightarrow$ D è asint. stab.

$B(s) = \dfrac{\alpha}{\beta + s}$ con α e β / R sia asint. stab.

$$G_R(s) = \frac{G_A(s)}{1 + G_A(s)G_B(s)} = \frac{\frac{1}{s-1}}{1 + \frac{1}{s-1}\,\frac{\alpha}{s+\beta}} = \frac{s+\beta}{s^2 + (\beta-1)s + (\alpha-\beta)}$$

$\Rightarrow$ deve essere $\beta - 1 > 0 \Rightarrow \beta > 1$

$\alpha - \beta > 0 \qquad \alpha > \beta$

Ad esempio $\begin{array}{l}\alpha = 9 \\ \beta = 5\end{array}$ $\rightarrow G_R(s) = \dfrac{s+5}{s^2+4s+4} = \dfrac{s+5}{(s+2)^2}$

che ha poli in $-2, -2$.

b) $\sigma(\Sigma) = \sigma(R) \cup \sigma(C) \cup \sigma(D)$

$$\sigma(\Sigma) = \{\underbrace{-2, -2}_{R}, \underbrace{-1, -1+i, -1-i}_{C}, \underset{\downarrow}{-2}\}$$

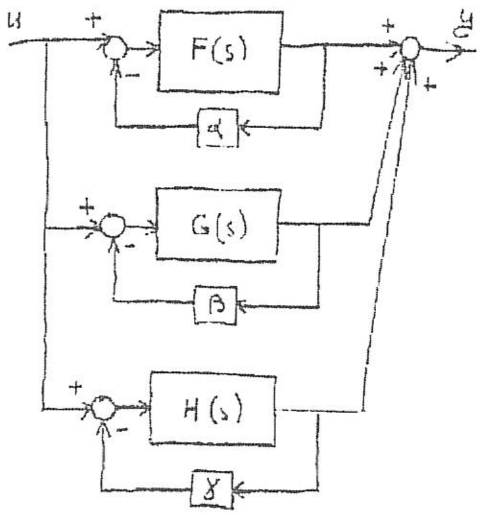
$$T = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, \frac{1}{2}\right\}$$

$T_D = 1$ e $T_R = 5T_D = 5$

Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura, in cui

$$F(s)=\frac{1}{s-1}$$
$$G(s)=\frac{1}{s^2+2s-2}$$
$$H(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+2s-1}$$

mentre α, β, γ sono coefficienti reali.



a) Determinare, motivando adeguatamente la risposta, per quali valori della terna (α, β, γ) il sistema in figura è asintoticamente stabile.

b) Determinare la funzione di trasferimento complessiva del sistema, esprimendola in funzione di F, G, H, α, β, γ.

a) R_F = retroazione $F - \alpha$

R_G = " $G - \beta$

R_H = " $H - \gamma$

R_F, R_G e R_H sono connessi in parallelo

Pertanto Σ è asint. stab. $\Leftrightarrow$ lo sono R_F, R_G e R_H

$$R_F = \frac{F}{1+\alpha F} = \frac{\frac{1}{s-1}}{1+\frac{\alpha}{s-1}} = \frac{1}{s-1+\alpha} \qquad \text{as. stab} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

$$R_G = \frac{G}{1+\beta G} = \frac{1}{s^2+2s-2+\beta} \qquad \text{as. stab} \Leftrightarrow \beta > 2$$

$$R_H = \frac{H}{1+\gamma H} = \frac{1}{s^3+2s^2+2s-1+\gamma} \qquad \text{as stab.} \underset{\text{HURWITZ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -1+\gamma > 0 \\ 4 > -1+\gamma \end{cases}$$

cioè $1 < \gamma < 5$

Pertanto Σ è as. stab $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ \beta > 2 \\ 1 < \gamma < 5 \end{cases}$

b) $$R_{TOT} = R_F + R_G + R_H = \frac{F}{1+\alpha F} + \frac{G}{1+\beta G} + \frac{H}{1+\gamma H}$$

Nel seguente sistema a tempo continuo di ordine 1, $x(t)$ rappresenta la frazione (rispetto al totale della popolazione) di acquirenti di un certo prodotto ($0 \le x(t) \le 1$). La creazione di nuovi acquirenti avviene per "contagio" (passa-parola) tra gli acquirenti x e i non acquirenti $(1-x)$.

$$\dot{x} = -x + px(1-x)$$

a) Determinare, per <u>tutti</u> i $p > 0$, gli stati di equilibrio del sistema e rappresentarli in un piano (p, x).
b) Discutere, per <u>tutti</u> i $p > 0$, la stabilità degli stati di equilibrio determinati al punto a).

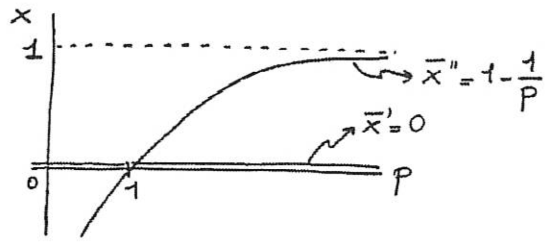
Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) calcolo equilibri:

$\dot{x}=0 \Rightarrow -x+px(1-x)=0$

$\hookrightarrow \bar{x}'=0$

$-1+p(1-x)=0 \rightarrow \bar{x}''=1-\frac{1}{p}$, $\bar{x}''>0$ se $p>1$



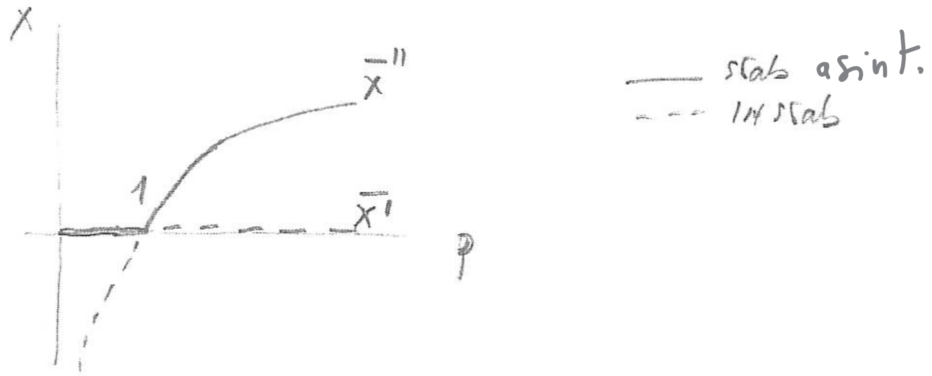
b) Jacobiano: $J=\frac{\partial f}{\partial x}=-1+p-2px$

$J|_{\bar{x}'=0}=-1+p$, asint. stabile se $p<1$
instabile se $p>1$

$J|_{\bar{x}''=1-\frac{1}{p}}=1-p$, instabile se $p<1$
asint. stabile se $p>1$

Per $p=1$: $\bar{x}'=\bar{x}''=0$, ma $J|_{\bar{x}'}=J|_{\bar{x}''}=0$ non permette di discutere la stabilità;

Per $p=1$ il sistema diventa: $\dot{x}=-x^2$, quindi $x\to 0$ se $x(0)>0$ ma $x\to -\infty$ se $x(0)<0 \Rightarrow \bar{x}$ è instabile.



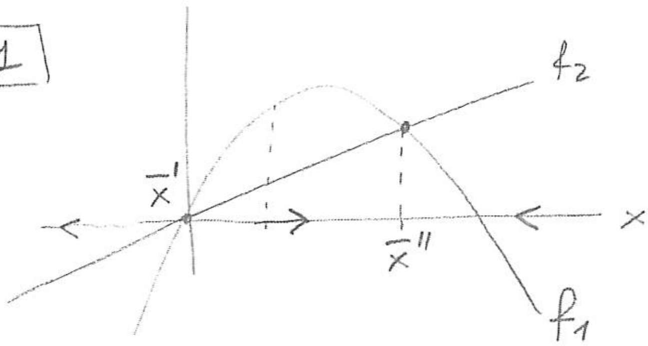
In alternativa, posso studiare la stabilità col "metodo grafico".

$\dot{x} = px(1-x) - x = f_1(x) - f_2(x)$ $f_1 = px(1-x)$ $p>0$

$f_2 = x$

Equilibrio $\dot{x} = 0 \rightarrow f_1 = f_2$

$\boxed{p>1}$

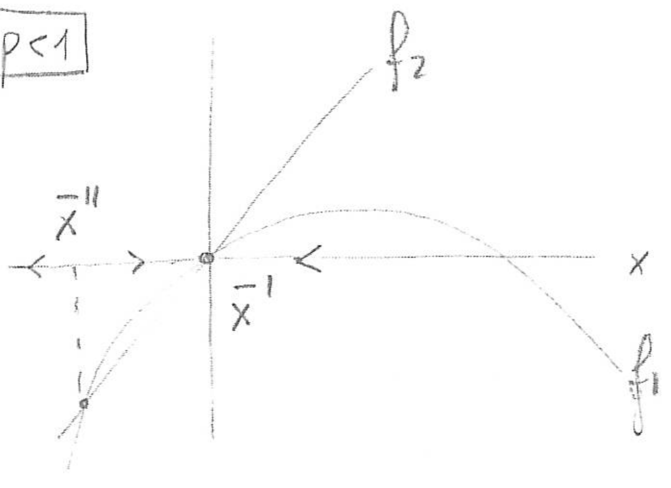


$\bar{x}' < x(0) < \bar{x}''$ $f_1 > f_2$ $\dot{x} > 0$

$x(0) > \bar{x}''$ $f_2 > f_1$ $\dot{x} < 0$ $\Rightarrow$ $\bar{x}'$ INST, $\bar{x}''$ A.S.

$x(0) < \bar{x}'$ $f_2 > f_1$ $\dot{x} < 0$

$\boxed{p<1}$



$x(0) > \bar{x}'$ $f_2 > f_1$ $\dot{x} < 0$

$x(0) < \bar{x}''$ $f_2 > f_1$ $\dot{x} < 0$

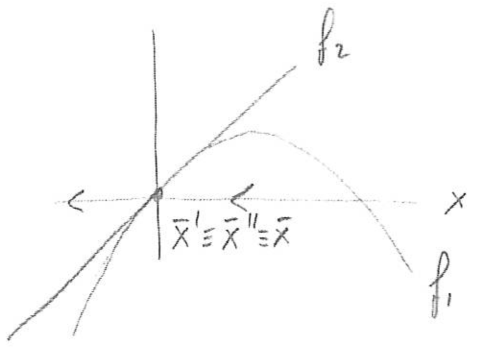
$\bar{x}'' < x(0) < \bar{x}'$ $f_1 > f_2$ $\dot{x} > 0$

$\Downarrow$

$\bar{x}'$ A.S.

$\bar{x}''$ INST

$\boxed{p=1}$



$x(0) > \bar{x}$ $f_2 > f_1$ $\dot{x} < 0$

$x(0) < \bar{x}$ $f_2 > f_1$ $\dot{x} < 0 \Rightarrow \bar{x}$ INST

Si consideri il seguente sistema a tempo continuo di ordine $n = 1$:

$\dot{x} = x - x^2 - p$,

dove $-\infty < p < \infty$ è un parametro reale.

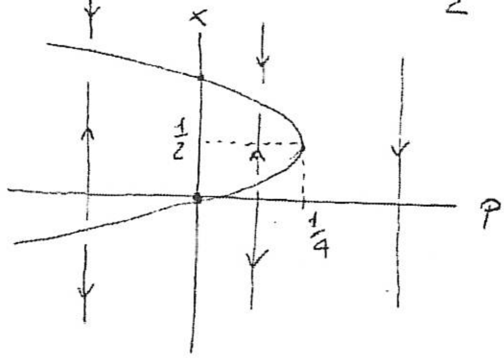
a) Determinare gli stati di equilibrio del sistema in funzione di p e rappresentarli nel piano (p, x).
b) Studiare la stabilità degli equilibri <u>per ogni</u> valore di p, utilizzando quando possibile il metodo di linearizzazione.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

3 <u>SOLUZIONE</u> (traccia)

a) $x^2 - x + p = 0 \qquad \bar{x} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4p}}{2}$

- 2 equilibri per $p < \frac{1}{4}$
- 1 equilibrio per $p = \frac{1}{4}$
- $\nexists$ equilibri per $p > \frac{1}{4}$



$p = \frac{1}{4} \rightarrow \bar{x} = \frac{1}{2}$

$p = 0 \rightarrow \bar{x} = 0$ e $\bar{x} = 1$

b) $J = 1 - 2x = 1 - 2\,\dfrac{1 \pm \sqrt{1-4p}}{2} = \mp\sqrt{1-4p}$

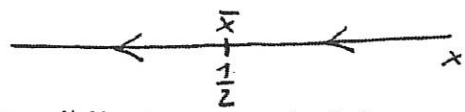
(ramo super.) $\bar{x} = \dfrac{1 + \sqrt{1-4p}}{2} \Rightarrow J = -\sqrt{1-4p}$, as. stabile

(ramo inf.) $\bar{x} = \dfrac{1 - \sqrt{1-4p}}{2} \Rightarrow J = +\sqrt{1-4p}$, instabile

equilibri per $p < 1/4$

Per $p = 1/4$: $\dot{x} = x - x^2 - \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

Quindi $\dot{x} < 0 \quad \forall x \neq \bar{x} = \frac{1}{2}$:



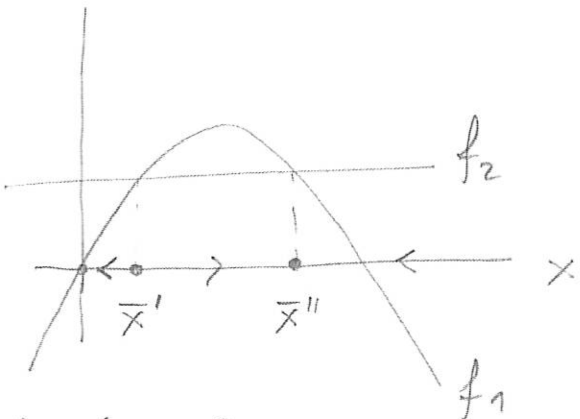
$\Rightarrow$ l'equilibrio è <u>instabile</u>

In alternativa, si può studiare la stabilità degli equilibri con metodo grafico

$\dot{x} = x - x^2 - p = f_1 - f_2$ con $f_1 = x - x^2$

$f_2 = p$

$p < \frac{1}{4}$

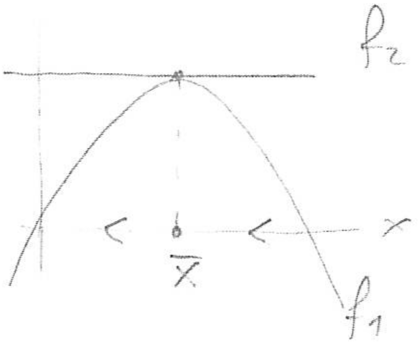


$x(0) > \bar{x}''$ $\quad f_2 > f_1 \quad \dot{x} < 0$

$x(0) < \bar{x}'$ $\quad f_2 > f_1 \quad \dot{x} < 0$ $\quad \Longrightarrow \quad \bar{x}''$ A.S.

$\bar{x}' < x(0) < \bar{x}''$ $\quad f_2 < f_1 \quad \dot{x} > 0$ $\quad \bar{x}'$ INST

$p = \frac{1}{4}$



$x(0) > \bar{x}$ $\quad f_2 > f_1 \quad \dot{x} < 0$

$x(0) < \bar{x}$ $\quad f_2 > f_1 \quad \dot{x} < 0$ $\quad \longrightarrow \quad \bar{x}$ INST

Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo continuo di ordine $n = 2$:

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1$$
$$\dot{x}_2 = 2x_2 - x_2^3 - x_1$$

Determinare gli stati di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità con il metodo della linearizzazione

---

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

equilibri: $\begin{cases} x_2 = x_1 \\ 2x_2 - x_2^3 - x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{x}' = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \bar{x}'' = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \bar{x}''' = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}$

Jacobiano $A(x) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2-3x_2^2 \end{vmatrix}$

(tc, $n=2 \to$ uso il criterio tr/det)

$A(\bar{x}') = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ $\left.\begin{matrix} \text{tr}A > 0 \\ \det A < 0 \end{matrix}\right\}$ $\bar{x}'$ INSTABILE

$A(\bar{x}'') = A(\bar{x}''') = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$ $\left.\begin{matrix} \text{tr}A < 0 \\ \det A > 0 \end{matrix}\right\}$ $\bar{x}'', \bar{x}'''$ ASINT. STABILI

Si consideri il seguente sistema a tempo continuo:

$$\dot{x} = 2(x - y)$$
$$\dot{y} = x^2 - 4x - y$$

a) Determinare gli stati di equilibrio.
b) Studiarne la stabilità mediante linearizzazione.

a) $\begin{cases} 2(x-y) = 0 \\ y = x^2 - 4x \end{cases} \Rightarrow \bar{x}' = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \bar{x}'' = \begin{vmatrix} 5 \\ 5 \end{vmatrix}$

b) $J = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2x-4 & -1 \end{vmatrix}$

$J(\bar{x}') = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}$ $\quad \lambda^2 - \lambda - 10 = 0$
$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{2} \cong \begin{matrix} 3.70 \\ -2.70 \end{matrix}$ INSTABILE

$J(\bar{x}'') = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$ $\quad \lambda^2 - \lambda + 10 = 0$
$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-40}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{39}}{2}$ INSTABILE

Dato il sistema

$$\dot{x} = -y - 2x + x^3$$
$$\dot{y} = y - px$$

determinarne gli equilibri e studiarne la stabilità al variare di p con il metodo della linearizzazione.

Equilibri:

$\dot{x} = 0 \rightarrow -y - 2x + x^3 = 0 \rightarrow -px - 2x + x^3 = 0$

$\dot{y} = 0 \rightarrow y = px$

$$x(-p - 2 + x^2) = 0 \; \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2+p} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow p \geq -2 \end{cases}$$

- $p \leq -2$ $\quad A(0,0)$
- $p > -2$ $\quad A(0,0)$ $\quad B(\sqrt{2+p}, \; p\sqrt{2+p})$ $\quad C(-\sqrt{2+p}, \; -p\sqrt{2+p})$

Stabilità

$$J = \begin{vmatrix} -2+3x^2 & -1 \\ -p & 1 \end{vmatrix}$$

$$J_A = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -p & 1 \end{vmatrix} \quad \text{tr} = -1 < 0 \quad \det = -(2+p) \; \begin{cases} p > -2 & \det < 0 \text{ instab.} \\ p < -2 & \det > 0 \text{ stabile asint.} \\ p = -2 & \det = 0 \; \exists \lambda = 0 \; ? \end{cases}$$

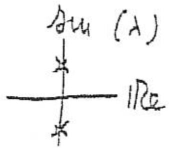
$$J_{B,C} = \begin{vmatrix} 4+3p & -1 \\ -p & 1 \end{vmatrix}$$

$\text{tr} = 5 + 3p$

$\det = 2(2+p) > 0$ essendo $p > -2$ in B e C

$-2 < p < -5/3 \rightarrow \text{tr} < 0 \rightarrow$ stabile asint

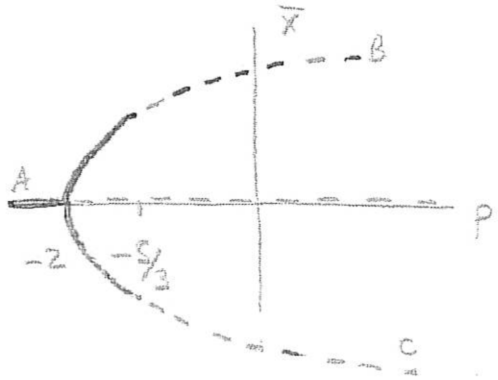
$p > -5/3 \rightarrow \text{tr} > 0 \rightarrow$ instabile

$p = -5/3 \rightarrow \text{tr} = 0$ e $\det > 0 \Rightarrow$ 

$\mathrm{Re}(\lambda) = 0$?

Complessivamente si ha:

	A	B	C
$p < -2$	Asint. stabile	/	/
$-2 < p < -5/3$	Instab.	Asint. stab.	Asint stab.
$p > -5/3$	Instab	Instab	Instab



Graficamente

—— = EQ. STABILE ASINT.
- - - = EQ. INSTABILE

$p = -2$ e $p = -5/3$ sono punti di biforcazione