

Controllo attivo delle oscillazioni di un grattacielo

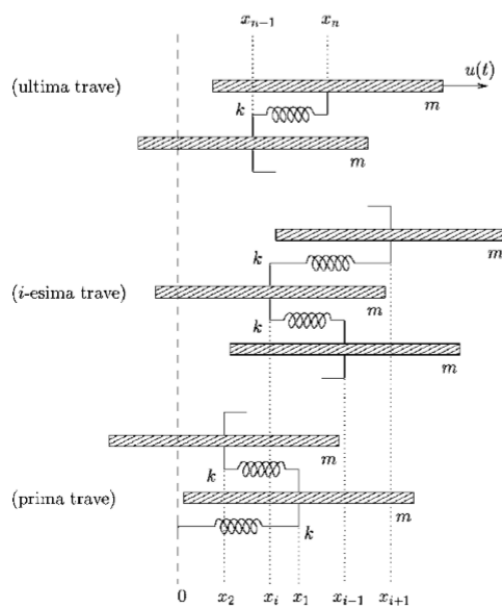
Problema

La sezione Ricerca e Sviluppo dell'industria elettromeccanica in cui lavori deve effettuare uno studio di fattibilità sul controllo attivo delle oscillazioni dei palazzi (innescate da intense raffiche di vento o scosse telluriche) che, com'è noto, possono essere notevoli e fastidiose. Si tratta di installare sul tetto del palazzo un reattore capace di esercitare una forza di direzione e intensità variabile e di mettere a punto una regola di conduzione del reattore capace di ridurre la durata delle oscillazioni. Tale regola di conduzione deve essere basata su misure effettuate in tempo reale sulla struttura. Per questo potrebbero esserci delle difficoltà poiché è possibile misurare solo la posizione dell'ultimo piano della struttura e trasmetterla istantaneamente a una centrale di elaborazione. Il responsabile della sezione ti ha chiesto di studiare il problema dal punto di vista teorico-concettuale. Egli vuole sapere, in particolare, se è possibile dimezzare la durata delle oscillazioni del palazzo controllando il reattore. Le caratteristiche geometriche e meccaniche della struttura sono dettagliate più avanti.

$$y = x_n$$

Suggerimenti

Si modellizzi il palazzo in termini di sistema dinamico lineare schematizzando l'edificio con n travi orizzontali (una per ogni piano) di massa m collegate tra loro (a causa dei pilastri). Si consideri (vedi figura) come ingresso la forza $u(t)$ esercitata dal reattore. Si indichi con $x_i(t)$ lo spostamento laterale dell' i -esima trave rispetto alla condizione di riposo e con $\dot{x}_i(t)$ la velocità dell' i -esima trave. Indicando con h il coefficiente di attrito viscoso, si scriva la legge di Newton per ogni trave, tenendo conto che i pilastri esercitano sulle travi delle forze che tendono a riportare l'edificio in posizione verticale e che tali forze sono proporzionali, secondo un coefficiente di elasticità k , agli spostamenti relativi tra le travi. Sulla base di quanto detto, si completi la figura seguente relativa a un generico palazzo di n piani:



$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_{1+n} \\ &\vdots \\ \dot{x}_i &= x_{i+n} \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= x_{2n} \\ \dot{x}_{1+n} &= \frac{1}{m} [-2kx_1 + kx_2 - hx_{1+n}] \\ &\vdots \\ \dot{x}_{i+n} &= \frac{1}{m} [kx_{i-1} - 2kx_i + kx_{i+1} - hx_{i+n}] \\ &\vdots \\ \dot{x}_{2n} &= \frac{1}{m} [kx_{n-1} - kx_n - hx_{2n} + u] \\ y &= x_n\end{aligned}$$

Svolgimento

Le caratteristiche geometriche e meccaniche dell'edificio sono:

$$n = 5 \quad m = 0.5 \quad k = 0.6 \quad h = 0.5$$

A partire da questi dati e dalle equazioni di stato $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$ e di uscita $y(t) = cx(t)$, si ricavino (numericamente) la matrice A e i vettori b e c .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2.4 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.2 & -2.4 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & -2.4 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2 & -2.4 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.2 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Domanda

Asservendo opportunamente la spinta del reattore $u(t)$ alla stima di tutte le variabili di stato, è possibile, mediante un regolatore asintotico lineare, dimezzare la durata delle oscillazioni del palazzo?

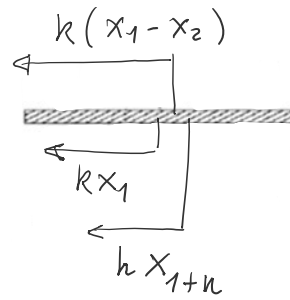
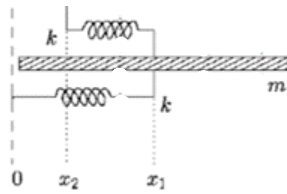
Risposta^(*) (sottolineare la risposta esatta) SÌ NO

Si giustifichi la risposta.

In caso affermativo determinare^(*) un possibile regolatore asintotico lineare che soddisfi le specifiche richieste.

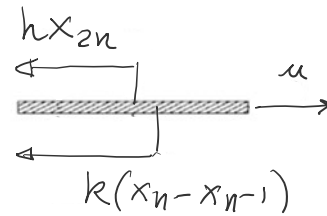
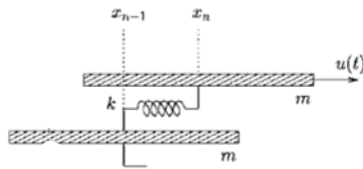
^(*) Suggerimento: per lo svolgimento dei calcoli si può fare riferimento a Matlab (comandi obsv, ctrb, acker)

PRIMA TRAVE



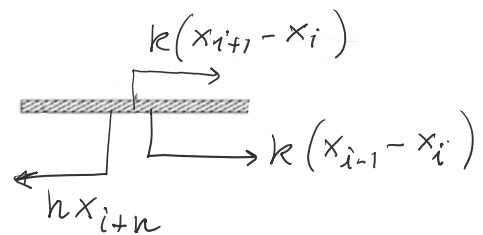
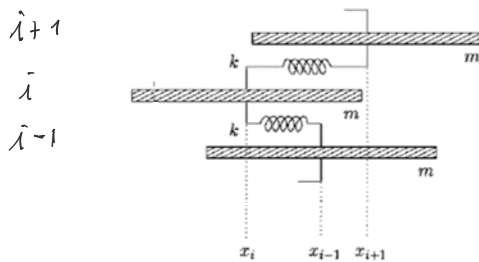
$$\ddot{x}_{1+n} = \frac{1}{m} \left[-kx_1 - h x_{1+n} - k(x_1 - x_2) \right]$$

ULTIMA TRAVE



$$\ddot{x}_{2n} = \frac{1}{m} \left[u - k(x_n - x_{n-1}) - h x_{2n} \right]$$

i-esima TRAVE



$$\ddot{x}_{i+n} = \frac{1}{m} \left[k(x_{i+1} - x_i) + k(x_{i-1} - x_i) - h x_{i+n} \right]$$

Giustificazione

La matrice di osservabilità O del sistema è pari a $\begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ \vdots \\ cA^9 \end{bmatrix}$ e ha la seguente struttura (gli elementi contrassegnati con # sono elementi non nulli)

0	0	0	0	#	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	#
0	0	0	#	#	0	0	0	0	#
0	0	0	#	#	0	0	0	#	#
0	0	#	#	#	0	0	0	#	#
0	0	#	#	#	0	0	#	#	#
0	#	#	#	#	0	0	#	#	#
0	#	#	#	#	0	#	#	#	#
#	#	#	#	#	0	#	#	#	#
#	#	#	#	#	#	#	#	#	#

Il determinante (il cui calcolo avviene selezionando di volta in volta righe o colonne aventi un solo elemento non nullo) è pari al prodotto dei termini evidenziati in rosso.

0	0	0	0	#	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	#
0	0	0	#	#	0	0	0	0	#
0	0	0	#	#	0	0	0	#	#
0	0	#	#	#	0	0	0	#	#
0	0	#	#	#	0	0	#	#	#
0	#	#	#	#	0	0	#	#	#
0	#	#	#	#	0	#	#	#	#
#	#	#	#	#	0	#	#	#	#
#	#	#	#	#	#	#	#	#	#

Pertanto, il determinante della matrice di osservabilità è non nullo così che a partire dalla misurazione della sola y (posizione dell'ultimo piano) è possibile, mediante un ricostruttore asintotico dello stato l , stimare tutto il vettore di stato x del sistema con dinamica arbitraria (cioè anche con tempi di risposta piccoli a piacere).

La matrice di raggiungibilità R del sistema è pari a $|b \quad Ab \quad A^2b \quad \dots \quad A^9b|$ e ha la seguente struttura (gli elementi contrassegnati con # sono elementi non nulli)

0	0	0	0	0	0	0	0	0	#
0	0	0	0	0	0	0	#	#	#
0	0	0	0	0	#	#	#	#	#
0	0	0	#	#	#	#	#	#	#
0	#	#	#	#	#	#	#	#	#
0	0	0	0	0	0	0	0	#	#
0	0	0	0	0	0	#	#	#	#
0	0	0	0	#	#	#	#	#	#
0	0	#	#	#	#	#	#	#	#
#	#	#	#	#	#	#	#	#	#

Il determinante (il cui calcolo avviene selezionando di volta in volta righe o colonne aventi un solo elemento non nullo) è pari al prodotto dei termini evidenziati in rosso.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	#
0	0	0	0	0	0	0	#	#	#
0	0	0	0	0	#	#	#	#	#
0	0	0	#	#	#	#	#	#	#
0	#	#	#	#	#	#	#	#	#
0	0	0	0	0	0	0	0	#	#
0	0	0	0	0	0	#	#	#	#
0	0	0	0	#	#	#	#	#	#
0	0	#	#	#	#	#	#	#	#
#	#	#	#	#	#	#	#	#	#

Pertanto, il determinante della matrice di raggiungibilità è non nullo così che, attraverso la stima dello stato ottenuta con il ricostruttore asintotico è possibile, mediante una legge di controllo lineare k , fissare a piacere la dinamica del sistema regolato.

In particolare sarà quindi possibile dimezzarne il tempo di risposta raddoppiando la parte reale dell'autovalore dominante del sistema non regolato!

A conferma di quanto trovato, utilizzando Matlab si ha:

```
>> m=0.5; h=1; k=0.6;
>> A=[0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
      0 0 0 0 0 0 1 0 0 0
      0 0 0 0 0 0 0 1 0 0
      0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
      -2*k/m k/m 0 0 0 -h/m 0 0 0 0
      k/m -2*k/m k/m 0 0 0 -h/m 0 0 0
      0 k/m -2*k/m k/m 0 0 0 -h/m 0 0
      0 0 k/m -2*k/m k/m 0 0 0 -h/m 0
      0 0 0 k/m -k/m 0 0 0 0 -h/m];
>> b=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 1/m]';
>> c=[0 0 0 0 1 0 0 0 0 0];
>> O=obsv(A,c);
>> determinante_osservabilita = det(O)
determinante_osservabilita =
    38.3376      Il determinante della matrice di osservabilità è non nullo!
>> R=ctrb(A,b);
>> determinante_raggiungibilita=det(R)
determinante_raggiungibilita =
   -3.9258e+04      Il determinante della matrice di raggiungibilità è non nullo!
```

Calcolo di un possibile regolatore

Vediamo ora come determinare il regolatore asintotico dello stato (legge di controllo $k +$ ricostruttore l) che dimezzi il tempo di risposta del sistema.

Calcoliamo inizialmente gli autovalori del sistema non regolato

```
>> autovalori_non_regolato=eig(A);
```

Per dimezzare la durata delle oscillazioni della struttura si deve dimezzare il tempo di risposta del sistema. Questo può ad esempio essere fatto raddoppiando la parte reale di tutti gli autovalori sia per il ricostruttore asintotico dello stato l che per la legge di controllo k . Così facendo, anche la parte reale dell'autovalore dominante raddoppia e il tempo di risposta di dimezza.

```
>> reale_autovalori_regolato=2*real(autovalori_non_regolato);
>> immag_autovalori_regolato=imag(autovalori_non_regolato);
>> autovalori_regolato=reale_autovalori_regolato+i*immag_autovalori_regolato;
```

Determiniamo quindi il ricostruttore asintotico dello stato

```
>> L=acker(A',-c',autovalori_regolato)'
```

L =

```
    6.2871
   -10.9951
   15.5763
   -6.9722
   -5.0000
    6.2720
   -4.6456
  -10.8397
   20.5602
   -8.2917
```

e la legge di controllo k

```
>> K=acker(A,-b,autovalori_regolato)
```

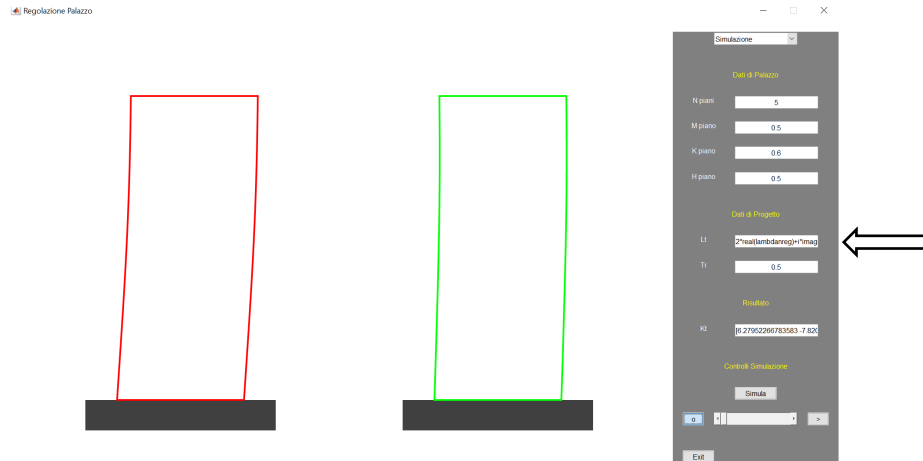
K =

```
    6.2795    -7.8204     2.3683     6.7940    -6.6458     3.1435    -5.4976     7.7881    -3.4861    -2.5000
```

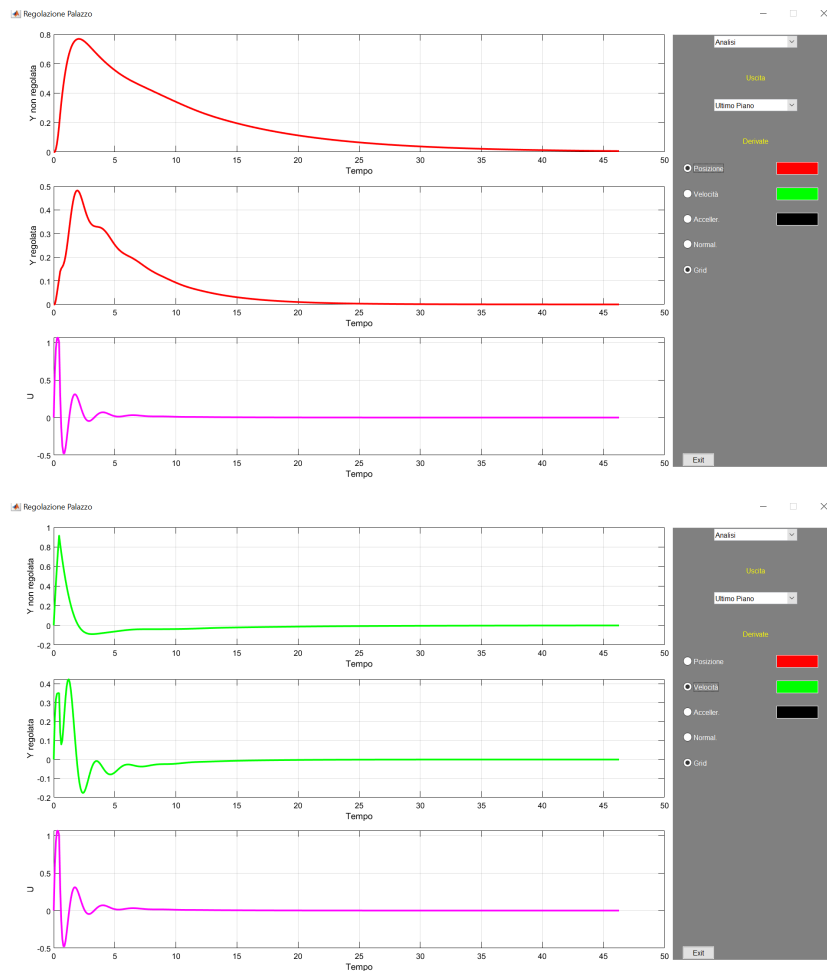
È inoltre possibile visualizzare le simulazioni del sistema non regolato e di quello regolato, infatti...(prosegue)

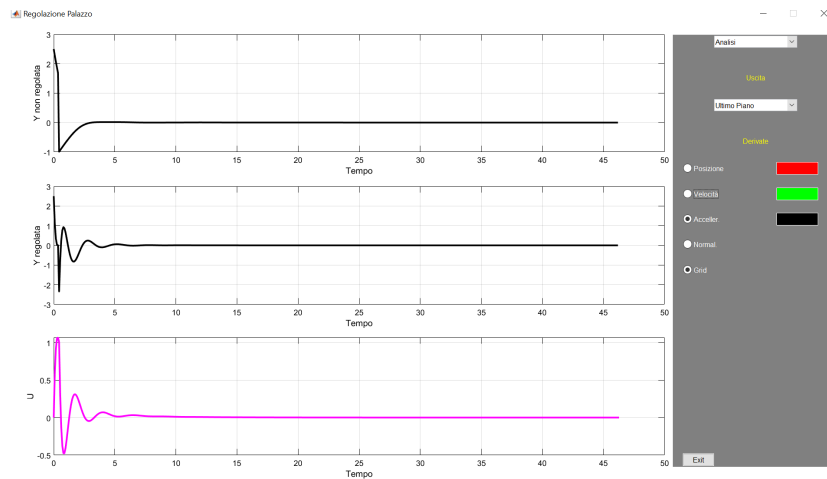
Il file `palace2.m` simula e visualizza quanto trovato.

Il palazzo è inizialmente sottoposto a una raffica di vento di durata T_r (tempo di raffica) che lo sposta dalla sua posizione di equilibrio. Dopodiché interviene il regolatore che riporta il palazzo in posizione verticale dimezzando il tempo di risposta (sistema non regolato a sinistra, regolato a destra)

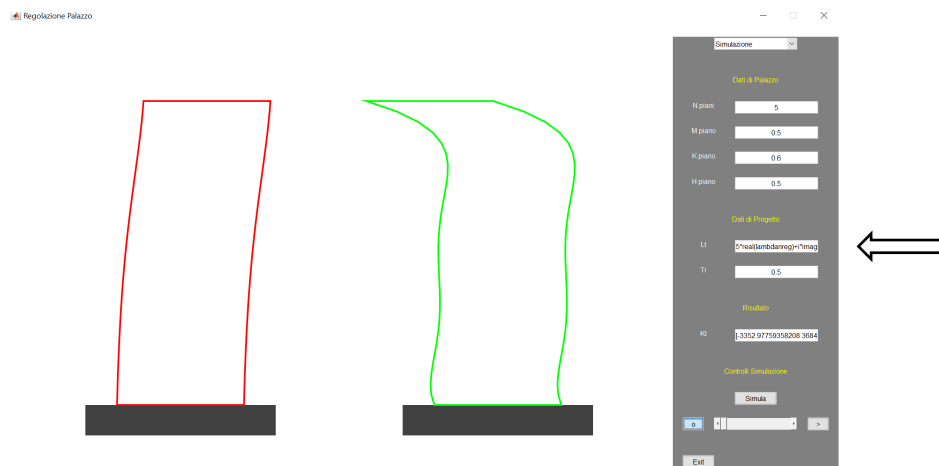


E' anche possibile analizzare nel tempo i valori di posizione, velocità e accelerazione dell'ultimo piano che, in questo caso, si mantengono accettabili.

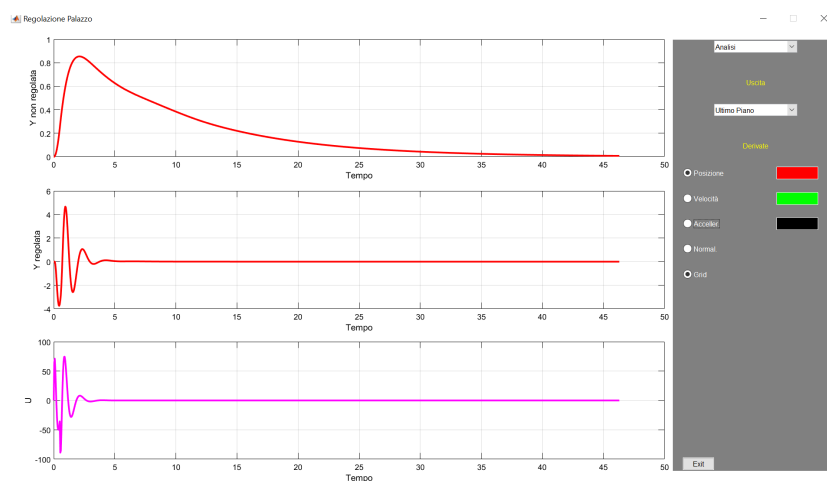


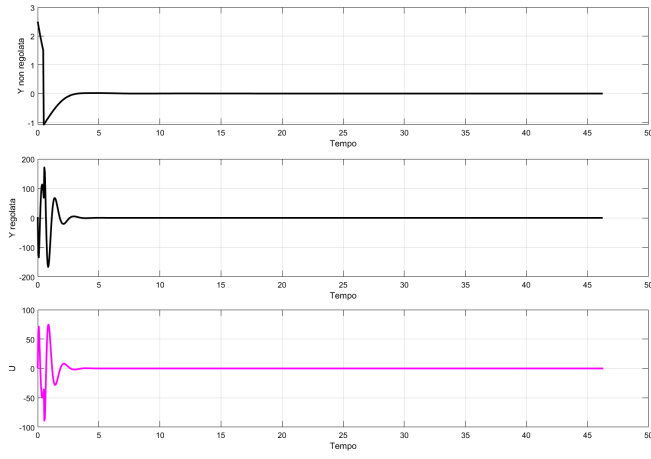


Supponendo ora di volere un tempo di risposta per il sistema regolato pari a un quinto di quello del sistema non regolato (quintuplicando quindi la parte reale degli autovalori) si ha:



Tuttavia in questo caso, posizione e accelerazione dell'ultimo piano diventano piuttosto elevate, non confortevoli quindi oppure addirittura non sopportabili dalla struttura meccanica.





Analisi

Unità

Ultimo Piano

Derivate

☒ Posizione

☐ Velocità

☐ Acceler.

☐ Normal.

☐ Graf.

Exit